Un modelo de choque y desgaste: Aproximación analítico-matricial

Montoro-Cazorla, Delia
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Jaén, España

Pérez-Ocón, Rafael
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada, España

Abstract

Se estudia un sistema sometido a choque y desgaste. Los choques producen daños debidos a condiciones externas, y cuando el sistema alcanza un cierto número de choques es reparado. Las reparaciones son tan buenas como nuevas. Los fallos internos del sistema son no-reparables, y cuando el fallo ocurre el sistema es reemplazado por otro nuevo e idéntico. Ambos tipos de fallos son independientes. Los choques ocurren según un proceso de llegadas Markoviano (Markovian arrival process). Los tiempos de vida y de reparación del sistema siguen distribuciones tipo-fase. El sistema se estudia siguiendo métodos analítico-matriciales. Se construye el proceso general de Markov gobierna el sistema y se calcula la distribución estacionaria. A partir de esta se determina la disponibilidad y las razones de ocurrencias de fallos. Una aplicación numérica ilustra los resultados.

Palabras clave: Proceso de llegadas Markoviano; distribución tipo-fase; sistema de choque y desgaste

1 Introduction

Los sistemas de choque y desgaste se presentan en fiabilidad cuando estos están sometidos a dos tipos de fallo bien diferenciados: externos, que se producen debido a las condiciones ambientales, e internos, que dependen de la estructura interna del sistema. Las causas externas que producen deterioro en el sistema se denota por choques, y esto incluye diferentes conceptos, como voltaje, vibración, tensión, entre otros. Este tipo de sistemas ha sido estudiado bajo diferentes puntos de vista y se pueden considerar un clásico en fiabilidad. Estos dos tipos de fallo se consideran independientes. En este trabajo consideramos el estudio de un sistema de este tipo usando los métodos analítico-matriciales. Estos métodos tienen la ventaja de que permiten estudiar sistemas generales bajo una metodología que permite una aproximación algorítmica de los resultados.

El trabajo inicial de este tipo de sistemas es el de Esary et al.(1973), en este artículo el desgaste es producido por los choques. Hemos restringido los trabajos previos que nos sirven de referencia a aquellos que tratan el sistema siguiendo los métodos analítico-matriciales, en los que juegan un papel fundamental las distribuciones tipo-fase y los procesos de llegadas Markovianos. La clase de distribuciones tipo-fase es densa, en el sentido de las distribuciones, en la familia de distribuciones continuas definidas sobre el semieje real positivo. Los procesos de llegadas Markovianos extienden los modelos de llegadas usuales, tales como el proceso de Poisson, el proceso de Poisson modulado por un proceso de Markov, y otros; además, incorporan una relación de dependencia entre los tiempos entre llegadas. El primer artículo aplicando estos métodos a sistemas sometidos a fallos externos e internos es el de Neuts et al. (1981). Este trabajo anterior es extendido en Neuts et al. (2000) incluyendo reparación, considerando que los fallos externos pueden ser reparables y no-reparables, y limitando el número de choques. En Montoro-Cazorla et al. (2009a) se estudia un sistema de esta clase en el que el número de fallos externos es aleatorio. Un sistema en de choque y desgaste en el que las llegadas de choques siguen un proceso de llegadas Markovianos se estudia en Montoro-Cazorla et al. (2006), es el primer trabajo en el que se incluye este modelo de llegadas en este tipo de sistemas. Otros trabajos relacionados con el presente y en el que los procesos de llegadas Markovianos representan las llegadas de choques son los de Montoro-Cazorla et al. (2008), Montoro-Cazorla et al.(2009b), Montoro-Cazorla et al. (2009c). Un artículo donde se estudian sistemas generales del tipo que presentamos aquí es el de Montoro-Cazorla et al. (2011).

Presentamos un sistema sometido a fallos externos (choques) e internos. Los choques ocurren según un proceso de llegadas Markoviano. El tiempo de fallo del sistemas sigue una distribuciòn tipo-fase. Después de un cierto número fijado de choques el sistema es reparado. La reparación es tan buena como nueva (reparación perfecta). El sistema puede fallar también debido a fallos internos, estos son no-reparables. Se estudia el sistema en régimen estacionario. Se construye el generador del proceso de Markov que gobierna el sistema, se calcula la disponibilidad y las razones de ocurrencia de los diferentes tipos de fallos.

El trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se definen los principales elementos que juegan un papel central a lo largo del artículo. En la sección 3 se describe el sistema y se construye el modelo Markoviano que lo gobierna. En la sección 4 se calcula la distribución estacionaria. En la sección 5 se calculan la disponibilidad y las razones de ocurrencia de los dos tipos de fallo que se consideran. En la sección 6 se presenta una aplicación numérica.

2 Definiciones

Los elementos básicos en los métodos analítico-matriciales (MAM) son las distribuciones tipo-fase y los procesos de llegadas Markovianos. Definimos ambas estructuras y las operaciones de Kronecker que están muy relacionadas con estos métodos.

Definición. La distribucion $H(\cdot)$ definida sobre $[0, \infty[$ es una distribución *phase-type* continua (distribución PH), si es la distribución del tiempo de absorción en un proceso de Markov con un número finito de estados transitorios y un estado absorbente. Si T denota la matriz de razones de cambio entre los estados transitorios, el vector inicial de probabilidades se denota por α, y e es un vector columna de 1's, todos ellos con el mismo orden, la distribución $H(\cdot)$ viene dada por

$$H(x) = 1 - \alpha \exp(Tx)e, \qquad x \geq 0.$$

Se dice que $H(\cdot)$ sigue una distribución $PH(\alpha, T)$. El vector de absorción T^0 satisface la relación $-Te = T^0$. Se dice que la distribución tiene representación (α, T). El orden de la distribución es el número de estados transitorios. .

Definición. Una distribución tipo-fase discreta se define de manera similar al caso continuo, se supone una cadena de Markov discreta con un número finito de estados transitorios y un estado absorbente. Si la matriz de transición entre los estados transitorios se denota por S, el vector inicial de probabilidad por β, y el vector columna de probabilidades de absorción por S^0, se verifica la relación $Se + S^0 = e$, y las probabilidades de ocupación de los estados $\{p_k\}$ vienen dadas por

$$p_k = \beta S^{k-1} S^0, \ k \geq 1.$$

Se dice que $\{p_k\}$ sigue una distribución $PH_d(\beta, S)$.

Definición. Sea D un generador infinitesimal irreducible de un proceso de Markov. Sea una sucesión de matrices $D_k, k \geq 1$, no-negativas. Sea una matriz D_0 con elementos no-negativos fuera de la diagonal, con elementos diagonales estrictamente negativos, y no-singular. Todas las matrices son cuadradas y tienen el mismo orden. Estas matrices están relacionadas por la expresión

$$D = D_0 + \sum_{k \geq 1} D_k.$$

Asociado a este proceso de Markov hay un proceso de renovación de Markov que representa un proceso de llegadas a la semirrecta real positiva y que opera como sigue. La matriz D_0 gobierna los tiempos entre llegadas, la matriz D_k gobierna la llegada del tipo k, $k \geq 1$. Este es un proceso de llegadas Markoviano, el acrónimo en inglés es MAP. El orden del MAP es el orden de las matrices que lo definen. El MAP aqui definido se denota $MAP(D_0, D_k), k \geq 1$.

Definición. Si A y B son matrices rectangulares de órdenes $m_1 \times m_2$ *and* $n_1 \times n_2$, respectivamente, el producto de Kronecker $A \otimes B$ es la matriz de orden $m_1 n_1 \times m_2 n_2$, escrita en forma compacta como $(a_{ij} B)$.

La suma de Kronecker de las matrices cuadradas C y D de órdenes p y q, respectivamente, se define por $C \oplus D = C \otimes I_q + I_p \otimes D$, donde I_k denota la matriz identidad de orden k.

Para más detalles sobre estas operaciones consultar Bellman (1970) y Graham (1981), y para distribuciones tipo-fase y MAPs consultar Neuts (1981).

3 El sistema

Consideramos un sistema de choque y desgaste que opera de acuerdo con las siguientes hipótesis.

Hipótesis 1. El tiempo de fallo del sistema sigue una distribución $PH(\alpha, T)$ de orden m, con función de distribución

$$F(t) = 1 - \alpha \exp(Tt)e, \quad t \geq 0.$$

Hipótesis 2. Los choques están gobernados por un $MAP(D_0, D_1)$ de orden n, vector inicial d y generador irreducible $D = D_0 + D_1$. La matriz de probabilidades de transición viene dada por

$$G(x) = \int_0^x \exp(D_0 u) du D_1, \quad x \geq 0.$$

La matriz paramétrica D_1 indica la ocurrrencia de un choque y la matriz D_0 gobierna la evolución del MAP entre las llegadas de choques.

Hipótesis 3. El número de choques que el sistema puede soplortar es M. A la llegada del $(m+1)$ choque el sistema pasa a reparación.

Hipótesis 4. El tiempo de reparación sigue una distribución $PH(\alpha, K)$ de orden r, con función de distribución

$$G(t) = 1 - \beta \exp(Kt)e, \quad t \geq 0.$$

Hipótesis 5. Los fallos internos no son reparados. Cuando ocurren se produce un reemplazamiento del sistema por otro nuevo e idéntico.

Hipótesis 6. La reparación es tan buena como nueva.

No hay otros tiempos implicados en el sistema.

El contador del número de choques se representa por una distribución tipo-fase discreta $PH_d(\gamma, L)$ de orden M. Para el caso $M = 4$, la matriz L, el vector γ, y el vector de absorción L^0 son

$$\gamma = (1, 0, 0, 0), L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ with } L^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que los primeros cuatro choques producen fallos que permiten que el sistema pueda seguir operativo. En otras palabras, son fallos leves. Es a la llegada del quinto choque cuando el sistema pasa a reparación.

3.1 Macro-estados

En los procesos de Markov que simulan la evolución de los sistemas una buena elección de los estados es esencial. Estos estados establecen las diferentes situaciones físicas por las que pasa el sistema, y deben ser exhaustivos, todas las posibles situaciones deben quedar reflejadas. Cuando se introduce la estructura analítico-matricial en el análisis de los sistemas los estados pasan a ser vectores y la estructura se complica, a cambio los resultados pueden ser expresados en forma algebraica. Estos estados vectoriales son denominados macro-estados. A continuación definimos los llamados macro-estados identificando las distintas situaciones del sistema a partir de las hipótesis.

Macro-estado 0 : El sistema está operativo y no ha sufrido choque alguno.

Macro-estado ν : El sistema está operativo y ha sufrido ν choques, $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Macro-estado 5 : El sistema está en reparación.

El conjunto de macro-estados es $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Estos macro-estados se expresan mediante vectores cuyos elementos son las fases de las diferentes estructuras aleatorias implicadas en el sistema: tiempo operativo, tiempo de reparación y fase del MAP. El conjunto de las fases para los diferentes macro-estados son los siguientes:

Macro-estado $0 = \{(0, i, j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$; siendo i la fase operativa y j la fase del MAP.

Macro-estado $\nu = \{(\nu, i, j),\ \nu = 1, 2, 3, 4$; siendo i la fase operativa y j la fase del MAP.

Macro-estado $5 = \{(5, h, j), 1 \leq h \leq r, 1 \leq j \leq n\}$; siendo h la fase de reparación y j la fase del MAP.

3.2 Generador

El generador del proceso de Markov que gobierna el sistema se denota por Q. En dicho generador se expresan las transiciones entre los diferentes macro-estados. A su vez, estas transiciones vienen determinadas por las razones de transición entre las fases que forman los macro-estados. La expresión final del generador, fijando como hemos dicho $M = 4$, es

$$\begin{pmatrix} T \oplus D_0 + T^0\alpha \otimes I & I \otimes D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T^0\alpha \otimes I & T \oplus D_0 & I \otimes D_1 & 0 & 0 & 0 \\ T^0\alpha \otimes I & 0 & T \oplus D_0 & I \otimes D_1 & 0 & 0 \\ T^0\alpha \otimes I & 0 & 0 & T \oplus D_0 & I \otimes D_1 & 0 \\ T^0\alpha \otimes I & 0 & 0 & 0 & T \oplus D_0 & e\beta \otimes D_1 \\ K^0\alpha \otimes I & 0 & 0 & 0 & 0 & K \oplus D \end{pmatrix}.$$

El orden del generador en el caso general es $mn(M + 1) + rn$.

Explicamos brevemente los bloques que aparecen en el generador.

El bloque $T \oplus D_0$ indica que el sistema está operativo y no se producen fallos, entonces los cambios que se producen son entre las fases operativas (gobernado por T) o entre las fases del MAP ((gobernado por D_0) pero no simultáneamente.

El bloque $T^0\alpha \otimes I$ indica que se produce un fallo interno (gobernado por T^0) y el sistema se reinicia, las fases del MAP no cambian. Esto último viene indicado por la matriz identidad I.

El bloque $I \otimes D_1$ indica que se produce un choque (gobernado por D_1) y no hay cambio entre las fases del tiempo de fallo.

El bloque $e\beta \otimes D_1$ indica que ocurre el quinto choque (gobernado por D_1) y el sistema inicia la reparación (gobernado por β) desde la fase en que se produce el choque (gobernado por e) .

El bloque $K \oplus D$ indica que el sistema está en reparación (gobernado por K) y el MAP continua operativo (gobernado por D).

El bloque $K^0\alpha \otimes I$ indica que la reparación se ha completado (gobernado por K^0) y se reinicia el sistema (gobernado por α) mientras el MAP no cambia de fase.

4 Distribución estacionaria

El vector de probabilidades estacionarias se denota por $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5]$, y está formado por sub-vectores de acuerdo con los correspondientes macro-estados. Los vectores $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ son de orden mn y el vector π_5 es de orden rn.

De la teoría general de procesos de Markov se deduce que el vector π satisface satisface las ecuaciones matriciales

$$\pi Q = 0, \pi e = 1.$$

La segunda ecuación es conocida como ecuación de normalización.

Efectuando los cálculos el sistema resultante es

$$\pi_0(T \oplus D_0 + T^0\alpha \otimes I) + \sum_{\nu=1}^{4} \pi_\nu (T^0\alpha \otimes I) + \pi_5(K^0\alpha \otimes I) = 0,$$

$$\pi_\nu(I \otimes D_1) + \pi_{\nu+1}(T \oplus D_0) = 0, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

$$\pi_4(e\beta \otimes D_1) + \pi_5(K \oplus D) = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{5} \pi_\nu e = 1.$$

Se introducen matrices intermedias para obtener una expresión más manejable, y que pueda ser calculada por procedimientos algorítmicos. Operando se llega a la expresión final del vector π:

$$\begin{array}{rcl} \pi_\nu & = & \pi_0 R_\nu, \ \nu = 1, 2, 3, 4, \\ \pi_5 & = & -\pi_0 R_4 B. \end{array}$$

La condición de normalization es

$$\pi_0 \left\{ (I + H) - R_4 B \right\} e = 1.$$

Las matrices auxiliares son las siguientes:

$$\begin{aligned} V &= (I \otimes D_1)(T \oplus D_0)^{-1}, \\ R_\nu &= (-1)^\nu V^\nu, \ \nu = 1, 2, 3, 4, \\ H &= \sum_{\nu=1}^{4} R_\nu, \\ B &= (e\beta \otimes D_1)(K \oplus D)^{-1}. \end{aligned}$$

5 Medidas de fiabilidad

Dos son las medidas de fiabilidad que calculamos, la disponibilidad y la razón de fallo. La primera indica el porcentaje que tiempo que el sistema está operativo, y la razón de fallo indica el número medio de fallos que se produce por unidad de tiempo. Dado que se distinguen dos tipos de fallo, hay que calcular una razón de fallo para cada uno de ellos.

La disponibilidad estacionaria es la primera medida en los sistemas reparables. En este caso, la expresión es

$$A = \sum_{\nu=0}^{4} \pi_\nu e.$$

Esta expresión indica que el sistema está operativo cuando ocupa cualquiera de los macro-estados operativos en cualquiera de sus correspondientes fases.

Los fallos ocurren cuando el sistema ocupa un estado operativo y el fallo puede ser interno o externo (debido a un choque). Damos las razones de fallo para cada uno de estos.

La razón de fallo debido a choques es

$$\rho_e = \left[\pi_0(e \otimes D_1 e) + \sum_{\nu=1}^{4} \pi_\nu (e \otimes D_1 e) \right].$$

Justificamos esta expresión. El primer sumando indica que el sistema es nuevo (no ha recibido choque alguno) y se produce un choque mientras el sistema ocupa cualquier fase operativa. El segundo sumando indica que el sistema no es nuevo (ha recibido algún choque gobernado por D_1) mientras el sistema ocupa cualqueir fase operativa.

La razón de ocurrencia de los fallos internos es

$$\rho_i = \left[\pi_0(T^0 \otimes e) + \sum_{\nu=1}^{4} \pi_\nu (T^0 \otimes e) \right].$$

Se advierte que la expresión es muy similar a la anterior. Ahora los fallos internos están gobernados por T^0 y el fallo se produce mientras que el MAP ocupa cualquier fase.

La razón total de fallos es la suma de las correspondientes razones anteriores, se denota por ρ, y se tiene $\rho = \rho_e + \rho_i$.

6 Aplicación numérica

Ilustramos los cálculos anteriores mediante un ejemplo numérico. Se advierte que los órdenes de las distribuciones tipo-fase y del MAP a lo largo del trabajo no han jugado un papel importante, ya que las expresiones matriciales indican cómo operar independientemente de los órdenes. Pero en las aplicaciones los órdenes son esenciales para los cálculos numéricos. Con el fin de simplificar los cálculos elegimos los menores órdenes posibles.

Suponemos que el tiempo de fallo del sistema sigue una distribución $PH(\alpha, T)$ de orden $m = 2$ con representación dada por

$$\alpha = (0, 1); T = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.45 \\ 0.40 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

El MAP que gobierna la llegada de choques es de orden $n = 2$ y las matrices paramétricas son las siguientes:

$$d = (1, 0), D_0 = \begin{pmatrix} -0.65 & 0.55 \\ 0.40 & -0.65 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

El tiempo de reparación sigue una distribución tipo-fase $PH(\beta, K)$ de orden $r = 2$ y representación

$$\beta = (1, 0); K = \begin{pmatrix} -1.17 & 0.58 \\ 0.58 & -1.17 \end{pmatrix},$$

Las expresiones para las medidas de fiabilidad calculadas son dadas en la Tabla 1.

Tabla 1. Medidas de fiabilidad

Medidas de fiabilidad
$Av = 0.8358$
$\rho_e = 0.1511$
$\rho_i = 0.0692$

La disponibilidad tienen un alto valor, el sistema está disponible el 83.58% del tiempo.

La razón de ocurrencia de fallos internos es aproximadamente la mitad de la razón de ocurrencia de choques.

Agradecimientos Este trabajo está parcialmente financiado por el proyecto MTM2010-17996 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

7 Referencias

1. Bellman, R. *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.

2. Esary, J.D., Marshal, A. W., Proschan, F. Shock models and wear processes, *Annals of Probability*, **1**, 627-649, 1973.

3. Graham, A. *Kronecker Products and Matrix Calculus With Applications*, Halsted Press, Chichester: Horwood, New York, 1981.

4. Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R. Segovia, M:C. Shock and wear models under policy N using phase-type distributions. *Applied Mathematical Modelling,* **33**, 543–554, 2009a.

5. Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R. Reliability of a system under two types of failures using a Markovian arrival process. *Operations Research Letters,* **34,** 525–530, 2006.

6. Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R., Segovia, M.C. Replacement policy in a system under shocks following a Markovian arrival process. *Reliability Engineering and System Safety,* **94**, 497-502, 2009b

7. Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R. A maintenance model with failures and inspection following Markovian arrival processes and two repair modes. *European Journal of Operational Research,* **186,** 694–707 2008.

8. Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R. Two shocks and wear systems under repair standing a finite number of shocks. *European Journal of Operational Research,* **214,** 298–307, 2011.

9. Neuts, M.F. (1981). *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models-An Algorithm Approach*, John Hopkins University Press, Baltimore.

10. Neuts, M.F., Bhattacharjee, M.C. Shock models with phase type survival and shock resistance. *Naval Research Logistic*, **28**, 213-219, 1981.

11. M. Neuts, Pérez-Ocón, Torres-Castro Repairable models with operating and repair times governed by phase-type distributions. *Advances in Applies Probability*, **32**, 468-479, 2000.

12. Pérez-Ocón, R., Segovia, M.C. Shock models under a Markovian arrival process. *Mathematical and Computer Modelling,* **50**, 879-884, 2009.