

# Diseño de un plan de muestreo por grupos con censura progresiva para la distribución de Weibull

*Fernández, Arturo J.<sup>1</sup> y Pérez-González, Carlos J.<sup>2</sup>*

Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de La Laguna

<sup>1</sup>ajfernan@ull.es, <sup>2</sup>cpgonzal@ull.es

## Resumen

El diseño de planes de muestreo en fiabilidad es un problema de optimización con restricciones de niveles de calidad fijados por el productor y el consumidor. Este trabajo presenta un procedimiento general para determinar diseños óptimos cuando la variable 'tiempo de fallo' sigue una distribución de Weibull con parámetro de forma desconocido. En los planes propuestos se agrupan las unidades o items experimentales y los grupos se someten a una prueba de fallo o muerte súbita aplicando esquemas de censura progresiva. El criterio de aceptación del lote utiliza un test uniformemente de máxima potencia. La resolución del problema de optimización permite obtener el tamaño muestral y, minimizando el coste total esperado, el número óptimo de grupos que se deben someter a ensayo. Además, se determinan expresiones explícitas de las soluciones óptimas utilizando aproximaciones precisas. Dichas soluciones son bastante robustas frente a pequeñas variaciones en el parámetro de forma de la distribución Weibull. El método se ilustra mediante un ejemplo que incluye tablas y gráficos ilustrativos.

**Palabras clave:** optimización con restricciones, análisis de fiabilidad, curva operativa característica, riesgos del muestreo, distribución de Weibull

## 1. Introducción

El diseño de planes de muestreo de aceptación en fiabilidad es, fundamentalmente, un problema de optimización con restricciones. En general, el analista desea minimizar el tamaño muestral o cualquier otra función objetivo bajo ciertos requisitos de calidad fijados por el productor y el consumidor.

Los diseños de planes de muestreo óptimos en fiabilidad permiten determinar criterios para decidir la aceptación o el rechazo de un lote de un producto, o el proceso de fabricación del mismo, con respecto a su duración o tiempo de fallo,  $T$ . Esta decisión se toma a partir de la información de una muestra extraída del lote o el proceso. Si la fiabilidad del producto no cumple las condiciones de calidad prefijadas, se considerará que es defectuoso. Entre los trabajos más recientes sobre planes de muestreo óptimos cabe citar a Fernández (2005, [5]), Chen et al. (2007, [3]), Arizono et al. (2008, [1]), Aslam y Jun (2009, [2]), Lu y Tsai (2009, [10]), Fernández et al. (2011, [8]) y Fernández y Pérez González (2012, [7], [6]).

En los experimentos de fiabilidad suele ser habitual aplicar procedimientos de censura sobre las muestras de unidades del producto sometidas a observación con el propósito de

reducir los costes económicos y la duración del experimento. Estos procedimientos resultan apropiados sobre todo cuando el producto tiene una esperanza de vida alta, los recursos son limitados o existen restricciones en la toma de observaciones. En particular, la censura progresiva se aplica cuando realizan retiradas periódicas de unidades experimentales y funcionales en cada instante de tiempo de fallo observado hasta la finalización del experimento. Diversos autores han estudiado los métodos de inferencia cuando la censura es progresiva en diversos artículos; por ejemplo, Fernández (2004, [4]), Nigm y Abo-Eleneen (2007, [11]) y Pérez-González y Fernández (2009, [12]).

Algunas pruebas de fiabilidad permiten agrupar las unidades y aplicar el test a las unidades de cada grupo de forma simultánea. Por ejemplo, el equipo que permite realizar la prueba de fiabilidad puede llevar a cabo la prueba sobre múltiples unidades de producto. En este trabajo se propone un plan de muestreo óptimo que permite la agrupación de unidades en varios grupos de un tamaño fijo especificado de antemano. Todas las unidades dentro de cada grupo se someten a ensayo de forma simultánea hasta que se observa el primer fallo del grupo. Además, en cada tiempo de fallo observado se retiran de forma aleatoria del experimento un número determinado de grupos funcionales. En numerosas ocasiones, los items retirados pueden contener información valiosa sobre el proceso de envejecimiento que puede ser utilizada para aceptar el producto y comenzar su producción o rechazarlo y modificar su diseño. Además, este plan de muestreo puede suponer un ahorro significativo en tiempo y costes. El objetivo de este estudio es determinar el diseño óptimo de un plan de muestreo por grupos con censura progresiva para la distribución de Weibull cuando el parámetro de escala es desconocido. Entre las referencias sobre planes de muestreo basados en la distribución de Weibull cabe mencionar a Jun et al. (2006, [9]), Chen et al. (2007, [3]), Arizono et al. (2008, [1]) and Seo et al. (2009, [13]).

Este trabajo se estructura de la siguiente forma. La Sección 2 introduce el muestreo de aceptación por grupos con censura progresiva y, además, presenta los estimadores de máxima verosimilitud (MLEs) del parámetro de forma y el tiempo de vida esperado. En la Sección 3 se deduce la expresión de la curva operativa característica (curva OC) del test uniformemente de máxima potencia (UMP), mientras que el procedimiento para obtener el diseño óptimo del plan de muestreo se explica en la Sección 4. El criterio de decisión del plan está basado en el test UMP. El número mínimo de fallos requerido,  $r$ , se determina mediante métodos iterativos. Asimismo, se obtiene una buena aproximación de  $r$  de forma explícita y se examina el efecto sobre el diseño del parámetro de forma. La Sección 5 analiza la selección del número de grupos  $g$  optimizando una función de costes y se hallan cotas superiores e inferiores de  $g$ . Un ejemplo ilustrativo se presenta en la Sección 6 y, finalmente, la Sección 7 recoge algunas conclusiones.

## 2. Muestreo de aceptación por grupos con censura progresiva

Supongamos que la variable de tiempo de vida,  $T$ , sigue una distribución de Weibull,  $W(\lambda, m)$ , con funciones de densidad y de distribución acumulada definidas, de forma respectiva, por

$$f(x; \lambda, m) = m\lambda^m x^{m-1} \exp -(\lambda x)^m, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

y

$$F(x; \lambda, m) = 1 - \exp -(\lambda x)^m, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

donde  $m > 0$  y  $\lambda > 0$  son los correspondientes parámetros de forma y escala. Supondremos que  $\lambda$  es desconocido y se debe buscar el valor de  $m$ . A menudo, se puede hallar  $m$  a partir de información previa disponible o podría estar fijado o estimado de antemano. Generalmente, los valores  $m \in [1, 3]$  parecen apropiados. Si  $m = 1$  se tiene que la distribución de  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$  y si  $m = 2$ ,  $T$  sigue una distribución de Rayleigh.

Supongamos que  $g$  grupos de  $s$  unidades de producto son seleccionados aleatoriamente a partir de un lote o proceso de fabricación y que se realiza un experimento de fiabilidad con censura progresiva. El experimento finaliza en el tiempo del  $r$ -ésimo fallo, donde  $r \leq g$ , y cada grupo es eliminado cuando sucede su primer fallo. Además,  $R_i$  grupos funcionales son retirados de forma aleatoria en el  $i$ -ésimo tiempo de fallo, con  $i = 1, \dots, n$ . Se tienen  $g_1 = g$  grupos en el test antes del primer fallo mientras que, antes del  $i$ -ésimo fallo, hay  $g_i = g - \sum_{j=1}^{i-1} (R_j + 1)$  grupos que continúan en la prueba, con  $i = 1, \dots, r$ . Es evidente que  $0 \leq R_i \leq g_i - 1$ , si  $i = 1, \dots, r - 1$  y  $R_r = g_r - 1$ . Además,  $g = \sum_{j=1}^r (R_j + 1)$ .

Consideremos que  $\mathbf{T} = (T_{1:r:n}, \dots, T_{r:r:n})$  es la muestra de tiempos de fallo observada en la prueba y  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_r)$  es el esquema de censura progresiva por grupos. Entonces, la verosimilitud asociada al experimento dado  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{R}$  se define como

$$\mathcal{L}(\lambda, m) = s^r \prod_{i=1}^r g_i f(T_{i:r:n}; \lambda, m) \{1 - F(T_{i:r:n}; \lambda, m)\}^{s(R_i+1)-1}, \quad \lambda > 0. \quad (3)$$

Por tanto, a partir de (1) y (2), se puede demostrar que los MLEs de  $\lambda$  y  $\mu = E[T]$  son

$$\hat{\lambda} = \left( \frac{r}{sW} \right)^{1/m} \quad \text{y} \quad \hat{\mu} = \frac{\Gamma(1/m)}{m} \left( 1/\hat{\lambda} \right)^{1/m}, \quad (4)$$

donde  $W = \sum_{i=1}^r (R_j + 1) T_{i:r:n}^m$  es un estadístico minimal suficiente y completo para  $\lambda$ . Hay que observar que  $W$  puede ser expresado como

$$W = \sum_{i=1}^r g_i (T_{i:r:n}^m - T_{(i-1):r:n}^m) = \sum_{i=1}^r U_i, \quad (5)$$

donde  $T_{0:r:n} = 0$  y  $2s\lambda^m U_i$  siguen distribuciones  $\chi_2^2$  independientes,  $i = 1, \dots, r$ . De esta forma,  $2s\lambda^m W \sim \chi_{2r}^2$ .

### 2.1. Curva operativa característica

En la prueba de fiabilidad, el productor estaría interesado en contrastar si  $H_0 : \mu \geq \mu_\alpha$ , donde  $\mu_\alpha$  es la vida media mínima aceptable, mientras que el consumidor desearía conocer si  $H_1 : \mu \leq \mu_\beta$ , donde  $\mu_\beta (< \mu_\alpha)$  es la vida media rechazable.

Como la razón de verosimilitudes es una función monótona no decreciente en  $\hat{\mu}$ , entonces el test UMP basado en los datos del muestreo por grupos  $\mathbf{T} = (T_{1:r:n}, \dots, T_{r:r:n})$  con esquema de censura progresiva  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_r)$  consiste en aceptar  $H_0$  si y sólo si  $\hat{\mu} \geq c$ , con  $c$  una constante de aceptación. La curva OC se expresa en términos de  $\mu$  como

$$L(\mu; r, c) = \Pr(\hat{\mu} \geq c \mid \mu) = \Pr(2s\lambda^m W \geq 2r(c/\mu)^m), \quad \mu > 0.$$

Como  $2s\lambda^m W \sim \chi_{2r}^2$ , se obtiene la siguiente expresión explícita de la curva OC después de integrar por partes varias veces

$$L(\mu; r, c) = \exp\left(-\frac{rc^m}{\mu^m}\right) \sum_{i=0}^{r-1} \frac{r^i c^{mi}}{i! \mu^{mi}}, \quad \mu > 0.$$

Cabe señalar que la función OC es independiente de  $g$ ,  $s$  y  $\mathbf{R}$ .

### 3. Diseño óptimo del plan de muestreo por grupos

En los planes de muestreo convencionales es preciso que el productor y el consumidor lleguen a un acuerdo sobre los riesgos que están dispuestos a tolerar, de forma que el productor sólo aceptará los lotes con  $\mu \geq \mu_\alpha$  con una probabilidad de, al menos,  $1 - \alpha$ , mientras que el consumidor rechazará los lotes con  $\mu \leq \mu_\beta$  con probabilidad de, al menos,  $1 - \beta$ . Una vez fijados los valores de la vida media aceptable y rechazable,  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\beta$ , así como los riesgos máximos,  $\alpha$  y  $\beta$ , el plan de muestreo óptimo  $(g, r, c)$  con menor número de fallos a observar debe verificar las condiciones

$$L(\mu_\alpha; r, c) \geq 1 - \alpha \quad \text{y} \quad L(\mu_\beta; r, c) \leq \beta. \quad (6)$$

El problema de hallar el número mínimo de fallos a observar,  $r$ , y la constantes de aceptación,  $c$ , es un problema de optimización mixta que se puede expresar como

$$\begin{aligned} \min \quad & r \\ \text{s.a.} \quad & L(\mu_\alpha; r, c) \geq 1 - \alpha, \\ & L(\mu_\beta; r, c) \leq \beta, \\ & g, r \in \mathbb{Z}^+, g \geq r, c > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

A partir de las condiciones (6) se deduce que

$$\chi_{2r; \alpha}^2 \geq 2r(c/\mu_\alpha)^m \quad \text{y} \quad \chi_{2r; 1-\beta}^2 \leq 2r(c/\mu_\beta)^m.$$

donde  $\chi_{2r; \gamma}^2$  denota el  $\gamma$ -cuantil de la distribución  $\chi_{2r}^2$ , para  $0 < \gamma < 1$ . Por tanto, el plan de muestreo se determina mediante el siguiente procedimiento:

1. Se halla el menor valor de  $r$  tal que

$$\mu_\alpha^m \chi_{2r; \alpha}^2 \geq \mu_\beta^m \chi_{2r; 1-\beta}^2. \quad (8)$$

En general, para hallar dicha solución se pueden aplicar métodos iterativos pero, como se explicará más adelante, podemos determinar una excelente solución aproximada de forma explícita.

2. La constante de aceptación puede ser cualquier valor  $c \in [k_\beta \mu_\beta, k_\alpha \mu_\alpha]$ , donde

$$k_\alpha = \{\chi_{2r; \alpha}^2 / (2r)\}^{1/m} \quad \text{y} \quad k_\beta = \{\chi_{2r; 1-\beta}^2 / (2r)\}^{1/m}. \quad (9)$$

En particular, en este trabajo se considera que una elección razonable de  $c$  sería escoger el punto medio del intervalo, i.e.  $c^* = (k_\beta \mu_\beta + k_\alpha \mu_\alpha) / 2$ .

Es posible obtener una aproximación de  $r$  utilizando la transformación de Wilson-Hilferty ([14]). Para valores  $r \geq 5$ ,

$$\sqrt{9r}[\{\chi_{2r}^2/(2r)\}^{1/3} + 1/(9r) - 1] \underset{\text{aprox.}}{\sim} N(0, 1).$$

A partir de (8), y de acuerdo a Pérez-González y Fernández (2009,[12]), se tiene que  $r \geq r_1$ , donde  $r_1$  debe verificar la ecuación

$$\mu_\alpha^{m/3}\{z_\alpha/(3\sqrt{r_1}) - 1/(9r_1) + 1\} = \mu_\beta^{m/3}\{-z_\beta/(3\sqrt{r_1}) - 1/(9r_1) + 1\},$$

en la cual  $z_\gamma$  es el  $\gamma$ -cuantil de la distribución normal estándar. Denotando por  $[x]$  al menor número entero mayor o igual que  $x$ , se deduce después de realizar algunos cálculos que

$$r \simeq [\{d^2 + 1/9\}^{1/2} - d]^2, \quad (10)$$

donde

$$d = \frac{z_\alpha \mu_\alpha^{m/3} + z_\beta \mu_\beta^{m/3}}{6(\mu_\alpha^{m/3} - \mu_\beta^{m/3})}.$$

Conviene observar que el número óptimo de fallos,  $r$ , es independiente de  $g$ ,  $s$  y  $\mathbf{R}$ .

La Tabla 1 recoge el número exacto y aproximado de fallos,  $r_{\text{exacto}}$  y  $r_{\text{aprox}}$ , de los planes óptimos de muestreo por grupos con censura progresiva cuando  $T \sim W(\lambda, m)$ . En particular,  $r$  se determina para ciertos valores seleccionados de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu_\beta/\mu_\alpha$  y para  $m = 1, 2$  y  $3$ . Se aprecia en esta tabla que, cuanto aumenta la razón  $\mu_\beta/\mu_\alpha$ , el número óptimo de fallos requerido se incrementa. Dicho incremento se puede observar en la Figura 1, donde se representa el número óptimo de fallos,  $r$ , frente a la razón de medias,  $\mu_\beta/\mu_\alpha$ , cuando  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$  y  $m = 1, 2$  y  $3$ . Se observa que el aumento de  $r$  es más acentuado para  $m = 1$  aunque es menos importante para  $m = 2$  o  $m = 3$ .

En la Tabla 1 también se observa que, si se mantiene fija la razón  $\mu_\beta/\mu_\alpha$ , el valor de  $r$  disminuye cuando aumenta  $m$ . Por tanto, ante desviaciones al alza en la estimación de  $m$ , el valor de  $r$  quedaría subestimado. En contraste, la variación de  $m$  tiene menor influencia sobre  $k_\alpha$  y  $k_\beta$ . Se aprecia que, cuando crece la razón de medias,  $k_\alpha$  aumenta mientras que  $k_\beta$  disminuye.

#### 4. Selección óptima del número de grupos

Aplicando el procedimiento descrito en la Sección 3, se puede obtener el número mínimo de fallos,  $r$ , a partir de las especificaciones de  $\alpha$ ,  $\beta$  y de los tiempos de vida medios  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\beta$ . El número óptimo de grupos,  $g$ , se puede seleccionar utilizando criterios de ahorro de costes o de tiempo.

A continuación, se estudiará la relación de  $g$ , así como de  $s$  y  $\mathbf{R}$ , con la duración esperada del test,  $ETD = E[T_{r:r:n}]$ . Conviene señalar que, de acuerdo a (5), se tiene que  $T_{r:r:n}^m = \sum_{i=1}^r U_i/g_i$  y que  $2s\lambda^m U_i \sim \chi_{2s}^2$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Por tanto,

$$E[T_{r:r:n}^m] = \frac{1}{s\lambda^m} \sum_{i=1}^r \frac{1}{g_i}.$$

Tabla 1: Número exacto y aproximado de fallos,  $r_{\text{exacto}}$  y  $r_{\text{aprox}}$ , y los correspondientes factores de aceptación,  $k_{\alpha}$  y  $k_{\beta}$ , para valores seleccionados de  $\mu_{\beta}/\mu_{\alpha}$  y  $m$  cuando  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.1$

$\mu_{\beta}/\mu_{\alpha}$	Parámetros del diseño			
	$r_{\text{exacto}}$	$r_{\text{aprox}}$	$k_{\alpha}$	$k_{\beta}$
	m=1			
0.2	4	4	0.3416	1.6702
0.3	7	7	0.4693	1.5046
0.4	11	11	0.5608	1.4006
0.5	19	19	0.6548	1.3030
0.6	34	34	0.7356	1.2251
0.7	69	69	0.8106	1.1571
0.8	174	174	0.8787	1.0983
	m=2			
0.2	2	2	0.4215	1.3946
0.3	2	2	0.4215	1.3946
0.4	4	4	0.5844	1.2924
0.5	6	6	0.6599	1.2433
0.6	9	9	0.7223	1.2016
0.7	18	18	0.8040	1.1452
0.8	45	45	0.8764	1.0932
	m=3			
0.2	1	1	0.3716	1.3205
0.3	2	2	0.5622	1.2482
0.4	2	2	0.5622	1.2482
0.5	3	3	0.6484	1.2106
0.6	5	5	0.7331	1.1693
0.7	9	9	0.8050	1.1303
0.8	21	21	0.8751	1.0880

Considerando los esquemas de censura progresiva dados por  $\mathbf{R} = (0, \dots, 0, g - r)$  y  $\mathbf{R} = (g - r, 0, \dots, 0)$ , se pueden obtener los valores máximo y mínimo de  $E[T_{r:r:n}^m]$ , respectivamente

$$\text{ETD}_{\min} = \left( \frac{1}{s\lambda^m} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{g-i} \right) \leq E[T_{r:r:n}^m] \leq \left( \frac{1}{s\lambda^m} \left\{ \frac{1}{g} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r-i} \right\} \right) = \text{ETD}_{\max}$$

Se puede comprobar que, si  $g - r \geq 10$

$$\text{ETD}_{\min} \simeq -\log\{1 - r/(g + 0.5)\}/(s\lambda^m).$$

De forma similar, si  $r \geq 10$

$$\text{ETD}_{\max} \simeq \{1/g + \log(r - 0.5) + \gamma\}/(s\lambda^m),$$

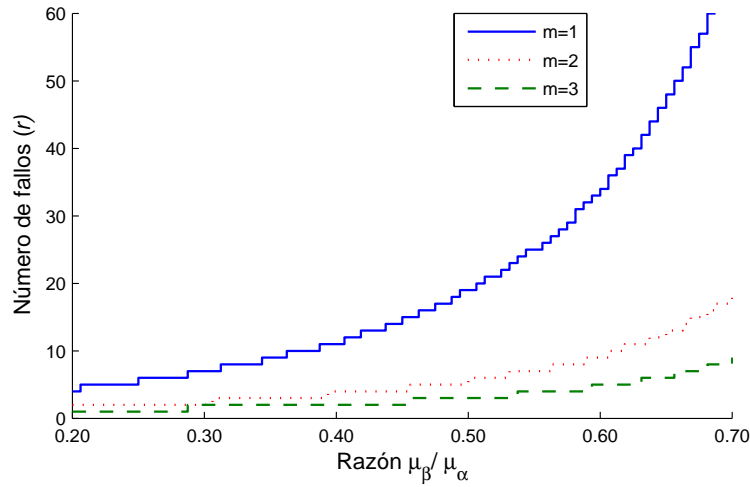


Figura 1: Número óptimo de fallos requerido,  $r$ , frente a la razón de medias,  $\mu_\beta/\mu_\alpha$ , para los valores  $m = 1, 2, 3$  cuando  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ .

donde  $\gamma = 0.577215$  es la constante de Euler.

La Tabla 2 presenta las duraciones esperadas,  $ETD_{min}$  y  $ETD_{max}$ , para valores seleccionados de  $g, r$  y  $s$  cuando  $m = 1$  y  $\lambda = 1$ . Cuando  $r$  y  $s$  se mantienen fijos y  $g$  se incrementa, se aprecia que  $ETD_{min}$  disminuye rápidamente, en contraste con  $ETD_{max}$ , que lo hace más lentamente. La disminución también se produce cuando se fija el valor de  $g$  y aumenta el de  $s$ . Esta variación se puede observar claramente en las Figuras 2 y 3, donde se representan  $ETD_{min}$  y  $ETD_{max}$  frente a  $s$  y  $g$ , respectivamente, cuando  $r = 10$ ,  $\lambda = 1$  y  $m = 1$ .

La Tabla 2 puede ser útil si se desea seleccionar el valor óptimo de  $g$  para  $r$  conocido. Pero otra forma de determinar el valor de  $g$  podría consistir en minimizar una función de costes apropiada. Supondremos que el coste del experimento es una función lineal del número total de unidades en el experimento,  $n = gs$ , y de la duración esperada de la prueba,  $E[T_{r:r;n}]$ . De esta forma, la función de costes está dada por  $b_1 T_{r:r;n} + b_2 n$ , donde  $b_1 > 0$  y  $b_2 > 0$  son los costes por unidad de tiempo y por ítem experimental, respectivamente. Consideremos que  $m = 1$  y, además, como estimación de  $E[T_{r:r;n}]$  se escogerá el punto medio del intervalo  $[ETD_{min}, ETD_{max}]$ . Una estimación equilibrada del coste esperado del experimento vendría dada por

$$ETC[g; r, s, \lambda] = b_1 \left[ \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{g-i} + \frac{1}{g} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r-i} \right] + b_2 sg. \quad (11)$$

De nuevo, el problema de hallar el número óptimo de grupos,  $g$ , es un problema de optimización entera que se puede expresar como

$$\begin{aligned} \min \quad & ETC[g; r, s, \lambda] \\ \text{s.a.} \quad & g \in \mathbb{Z}^+, g \geq r. \end{aligned} \quad (12)$$

El número óptimo de grupos será el menor entero  $g \geq r$  tal que  $ETC[g+1; r, s, \lambda] \geq$

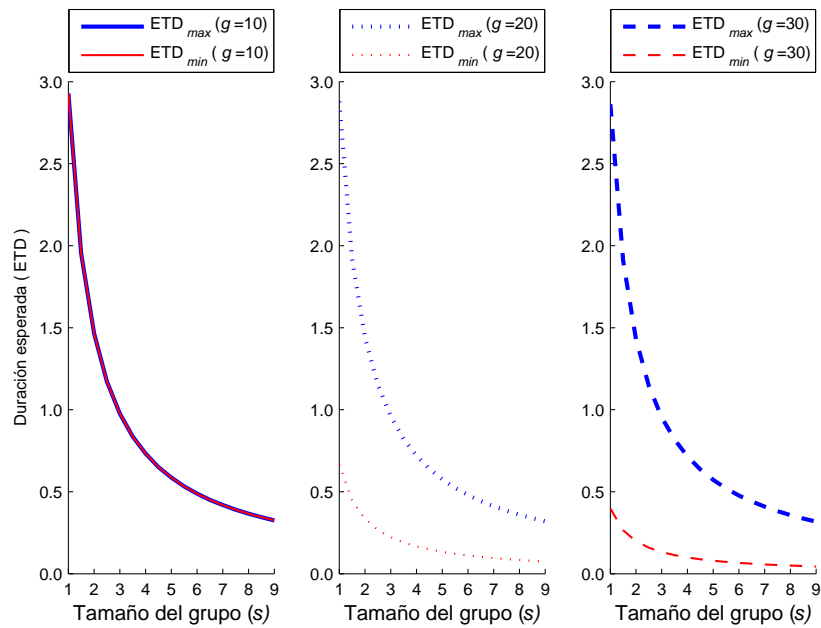


Figura 2: Duración esperada minimal/maximal,  $ETD_{\min}$  y  $ETD_{\max}$ , frente al tamaño del grupo,  $s$ , para los valores  $g = 10, 20, 30$  cuando  $r = 10$ ,  $\lambda = 1$  y  $m = 1$ .

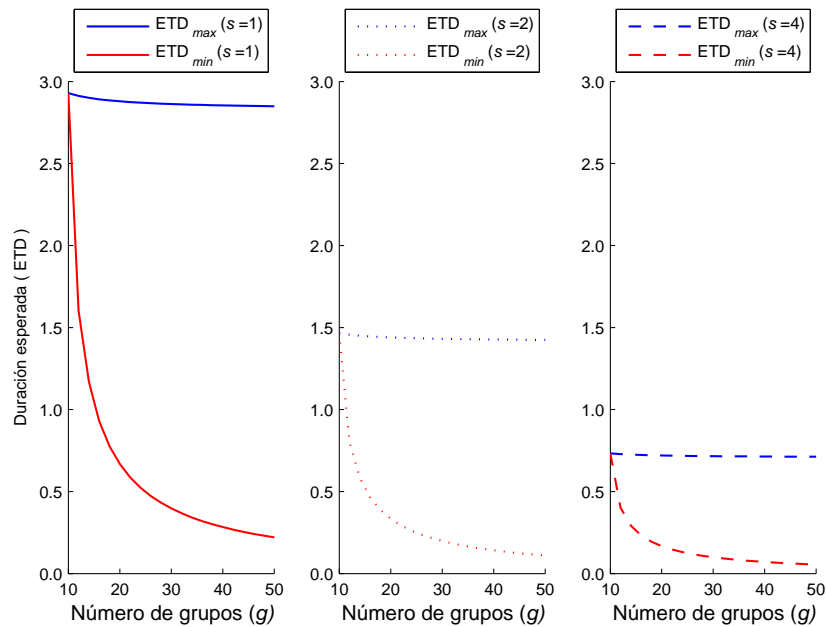


Figura 3: Duración esperada minimal/maximal,  $ETD_{\min}$  y  $ETD_{\max}$ , frente al número de grupos,  $g$ , para los valores  $s = 1, 2, 4$  cuando  $r = 10$ ,  $\lambda = 1$  y  $m = 1$ .



Tabla 2: Duración esperada minimal y maximal del experimento,  $ETD_{\min}$  y  $ETD_{\max}$ , para valores seleccionados de  $g, r$  y  $s$  cuando  $m = 1$  y  $\lambda = 1$ 

$r$	$g$	$ETD_{\min}$	$ETD_{\max}$	$ETD_{\min}$	$ETD_{\max}$	$ETD_{\min}$	$ETD_{\max}$
		s=1		s=5		s=9	
5	5	2.2833	2.2833	0.4567	0.4567	0.2537	0.2537
5	10	0.6456	2.1833	0.1291	0.4367	0.0717	0.2426
5	15	0.3893	2.1500	0.0779	0.4300	0.0433	0.2389
10	10	2.9290	2.9290	0.5858	0.5858	0.3254	0.3254
10	15	1.0349	2.8956	0.2070	0.5791	0.1150	0.3217
10	20	0.6688	2.8790	0.1338	0.5758	0.0743	0.3199
15	15	3.3182	3.3182	0.6636	0.6636	0.3687	0.3687
15	20	1.3144	3.3016	0.2629	0.6603	0.1460	0.3668
15	25	0.8870	3.2916	0.1774	0.6583	0.0986	0.3657
20	20	3.5977	3.5977	0.7195	0.7195	0.3997	0.3997
20	25	1.5326	3.5877	0.3065	0.7175	0.1703	0.3986
20	30	1.0660	3.5811	0.2132	0.7162	0.1184	0.3979

$ETC[g; r, s, \lambda]$ . Por tanto, el valor óptimo de  $g$  verifica que

$$\begin{aligned} \Psi(g) &= \frac{2s\lambda}{b_1} (ETC[g+1; r, s, \lambda] - ETC[g; r, s, \lambda]) \\ &= \frac{2}{g+1} - \frac{1}{g-r+1} - \frac{1}{g} + \frac{2s^2\lambda b_2}{b_1} \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Cuando  $\Psi(r) \geq 0$ , entonces  $g = r$ . En otro caso, se puede obtener una solución aproximada  $g \simeq \lceil g_0 \rceil$ , donde  $g_0$  sería la solución de la ecuación  $\Psi(g) = 0$  con  $g \geq r$ . En este caso, se puede demostrar que existe dicha solución ya que  $\Psi(r) < 0$  y que  $\delta = \lim_{g \rightarrow \infty} \Psi(g) = \frac{2s^2\lambda b_2}{b_1} > 0$ . Además,  $\Psi(\cdot)$  es continua y  $\partial\Psi(g)/\partial g > 0$  para  $g \geq r$ .

Para el valor óptimo de  $g$  es posible definir una cota inferior y otra superior de forma explícita. En primer lugar, se tiene que

$$\Psi(g) < \Psi_l(g) = \frac{1}{g+1} - \frac{1}{g-r+1} + \delta,$$

donde  $\Psi_l(g)$  se obtiene reemplazando en  $\Psi(g)$  el término  $1/g$  por  $1/(g+1)$ . Entonces, la solución  $g_l$  de  $\Psi_l(g) = 0$  representa una cota inferior del valor óptimo  $g$  y viene dada por

$$g_l = \frac{r-2 + \sqrt{(r-2)^2 + 4(r-1+r/\delta)}}{2}. \quad (14)$$

Asimismo, se observa que

$$\Psi(g) > \Psi_u(g) = \frac{2}{g+1} - \frac{1}{g-r+1} - \frac{1}{g_l} + \delta,$$

Tabla 3: Número óptimo de grupos,  $g$ , coste esperado del experimento, ETC, duración esperada minimal/maximal del experimento,  $ETD_{min}$  y  $ETD_{max}$ , para valores seleccionados de  $s$  cuando  $r = 10$ ,  $m = 1$ ,  $b_1 = 20$ ,  $b_2 = 1$  y  $\lambda = 1/4$ .

$s$	$g$	ETC	$ETD_{\min}$	$ETD_{\max}$	$g_l$	$g_0$	$g_u$
1	26	159.645	1.895	11.470	24.6155	25.7242	26.5656
2	16	108.444	1.861	5.783	15.1803	15.8498	19.0000
3	13	95.703	1.796	3.875	12.3333	12.8811	14.6719
4	12	93.155	1.603	2.912	11.0711	11.5655	12.6603
5	11	94.518	1.616	2.336	10.4031	10.8648	11.5498
6	11	98.932	1.347	1.947	10.0093	10.4455	10.8718
7	11	105.227	1.154	1.669	9.7588	10.1727	10.4286
8	10	109.290	1.464	1.464	9.5902	9.9836	10.1237
9	10	116.035	1.302	1.302	9.4716	9.8459	9.9056

donde  $\Psi_u(g)$  se obtiene reemplazando en  $\Psi(g)$  el término  $1/g$  por  $1/g_l$ . En este caso, la solución  $g_u$  de  $\Psi_u(g) = 0$  representa una cota superior del valor óptimo  $g$  y, después de realizar algunos cálculos, se puede expresar como

$$g_u = 2r - 1 \quad \text{si } \delta = \frac{1}{g_l}. \quad (15)$$

Cuando  $\delta \neq \frac{1}{g_l}$ , y asumiendo que

$$q = \left( r - 2 - \frac{1}{\delta - 1/g_l} \right)^2 + 4 \left( r - 1 + \frac{2r - 1}{\delta - 1/g_l} \right) \geq 0,$$

se tiene que

$$g_u = \begin{cases} \frac{r - 2 - 1/(\delta - 1/g_l) + \sqrt{q}}{2} & \text{si } \left( \delta - \frac{1}{g_l} \right) < -\frac{2r-1}{r-1}, \\ \frac{r - 2 - 1/(\delta - 1/g_l) - \sqrt{q}}{2} & \text{si } \left( \delta - \frac{1}{g_l} \right) > -\frac{2r-1}{r-1} \end{cases} \quad (16)$$

El número óptimo de grupos,  $g$ , donde se alcanza el mínimo de  $ETC[g; r, s, \lambda]$  verifica que  $\lceil g_l \rceil \leq g \leq \lceil g_u \rceil$ .

La Tabla 3 recoge los valores óptimos de  $g$  y el ETC, así como  $ETD_{\min}$  y  $ETD_{\max}$ , cuando  $s = 1, \dots, 9$ ,  $r = 10$ ,  $m = 1$ ,  $\lambda = 1/4$  y los componentes de costes son  $b_1 = 20$  y  $b_2 = 1$ . También se presentan las cotas de  $g$ ,  $g_l$  y  $g_u$ , así como el valor de  $g_0$ . Se observa que los valores del número óptimo de grupos para  $s = 2, 3$  y  $4$  son  $g = 16, 13$  y  $12$ , respectivamente. El valor mínimo de ETC se obtiene para  $s = 4$  y  $g = 12$ . Se aprecia que  $\lceil g_l \rceil$  prácticamente coincide con  $g$  cuando  $s \geq 2$  y representa, en general, una excelente aproximación del número óptimo de grupos. En la Figura 4 se muestra el coste esperado del experimento, ETC, cuando  $s = 2, 3$  y  $4$ .

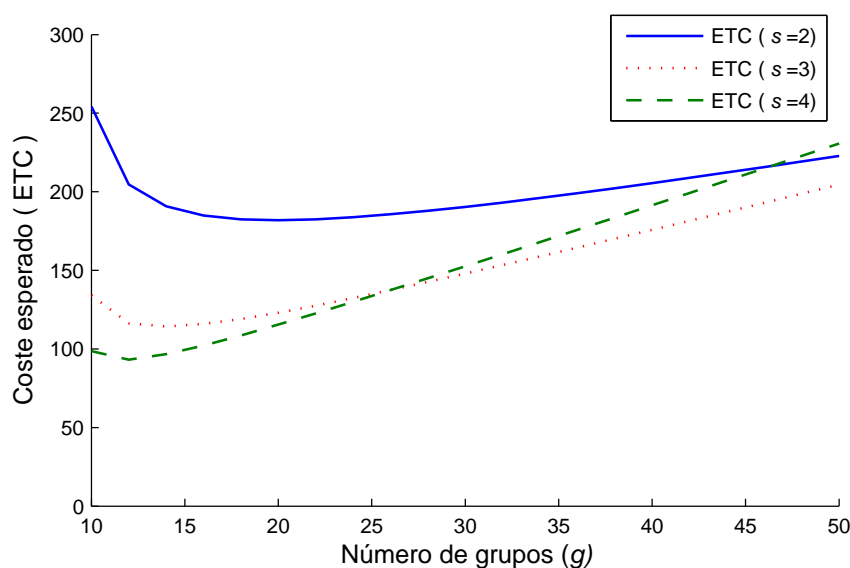


Figura 4: Coste esperado del experimento, ETC, frente al número de grupos,  $g$ , para los valores  $s = 2, 3, 4$  cuando  $r = 10$ ,  $m = 1$ ,  $b_1 = 20$ ,  $b_2 = 1$  y  $\lambda = 1/4$ .

## 5. Conclusiones

En muchos estudios de fiabilidad, puede resultar conveniente agrupar las unidades experimentales y someter a prueba las unidades en cada grupo de forma simultánea. Este trabajo desarrolla el diseño de un plan de muestreo de aceptación óptimo que combina la agrupación de items, el ensayo por muerte súbita en cada grupo y la eliminación de grupos por censura progresiva, para la distribución de Weibull del tiempo de vida con parámetro de escala desconocido. A partir de una función de costes que depende del número de unidades y la duración del experimento, se describe un método de optimización para hallar el plan de muestreo con coste óptimo dadas las especificaciones fijadas por el productor y el consumidor. El problema de optimización se resuelve en dos fases. En primer lugar, la solución del problema de programación mixta nos proporciona el número mínimo de fallos,  $r$ , y la constante de aceptación,  $c$ , a partir de los requisitos del productor y el consumidor. A continuación, se obtiene el número de grupos,  $g$ , que minimiza una estimación del coste esperado del experimento sujeto a la restricción  $g \geq r$ .

El procedimiento para determinar el diseño óptimo del plan de muestreo se puede resumir de la forma siguiente:

- Se fija el valor del parámetro de forma,  $m$ , el tamaño del grupo,  $s$ , los valores medios de vida aceptable y rechazable,  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\beta$ , y los riesgos máximos del productor y el consumidor,  $\alpha$  y  $\beta$ .
- Se obtiene el número óptimo de fallos,  $r$ , y la constante de aceptación,  $c^*$ , resolviendo el problema de optimización (12). La aproximación dada en (10) es prácticamente exacta, mientras que  $c^* = (k_\beta \mu_\beta + k_\alpha \mu_\alpha)/2$ , donde  $k_\alpha$  y  $k_\beta$  están definidos en (9).
- Se seleccionan los costes por unidad de tiempo y por item experimental,  $b_1 > 0$  y

$b_2 > 0$ , y una estimación del valor de  $\lambda$ .

- Se obtiene el número óptimo de grupos,  $g$ , resolviendo el problema de optimización (12) cuando  $m = 1$  y para un esquema de censura progresiva por grupos,  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_r)$ . Las cotas inferior y superior dadas en (14) y (-), respectivamente, permiten dar un intervalo aproximado para el número óptimo de grupos,  $[g_l] \leq g \leq [g_u]$ ; además, la cota inferior  $[g_l]$  representa, en muchos casos, una aproximación excelente del valor de  $g$ .
- Para decidir sobre la aceptación o rechazo de un lote de producto, se seleccionan aleatoriamente  $g$  grupos de  $s$  unidades del lote, y se someten a ensayo de forma simultánea aplicando el esquema de censura progresiva por grupos,  $\mathbf{R}$ . Entonces,
  - se acepta el lote si  $\hat{\mu} \geq c^*$ , donde  $\hat{\mu}$  se define en 4.
  - en otro caso, se rechaza.

El diseño óptimo del plan de muestreo por grupos con censura progresiva permite reducir la duración del experimento y el coste, así como inspeccionar con gran detalle las unidades defectuosas y las que no han fallado. La información a priori del mecanismo de fallo y los test de vida acelerados también se pueden utilizar para ahorrar tiempo y costes de la prueba. Además, en muchos casos, nuestro procedimiento permite obtener soluciones que son robustas a pequeñas desviaciones en la especificación del parámetro de forma, es decir, el mejor plan de muestreo es casi óptimo cuando el parámetro de forma es ligeramente distinto.

## 6. Bibliografía

- [1] Arizono, I., Kawamura, Y. and Takemoto, Y. (2008). Reliability tests for Weibull distribution with variational shape parameter based on sudden death lifetime data. *European Journal of Operational Research*, **189**, 570–574.
- [2] Aslam, M. and Jun, C.H. (2009). A group acceptance sampling plan for truncated life test having Weibull distribution. *Journal of Applied Statistics*, **36**, 1021–1027.
- [3] Chen, J.W., Li, K.H. and Lam, Y. (2007). Bayesian single and double variable sampling plans for the Weibull distribution with censoring. *European Journal of Operational Research*, **2**, 1062–1073.
- [4] Fernández, A.J. (2004). On estimating exponential parameters with general type II progressive censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **121**, 135–147.
- [5] Fernández, A.J. (2005). Progressively censored variables sampling plans for two-parameter exponential distributions. *Journal of Applied Statistics*, **32**(8), 823–829.
- [6] Fernández, A.J. and Pérez-González, C.J. (2012). Generalized beta prior models on fraction defective in reliability test planning. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. doi:10.1016/j.cam.2012.02.012.
- [7] Fernández, A.J. and Pérez-González, C.J. (2012). Optimal acceptance sampling plans for log-location-scale lifetime models using average risks. *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 719–731.

- 
- [8] Fernández, A.J., Pérez-González, C.J., Aslam, M. and Jun, C.H. (2011). Design of progressively censored group sampling plans for Weibull distributions: An optimization problem. *European Journal of Operational Research*, **211**, 525–532.
- [9] Jun, C.H., Balamurali, S. and Lee, S.H. (2006). Variables sampling plans for Weibull distributed lifetimes under sudden death testing. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**(1), 53–58.
- [10] Lu, W. and Tsai, T.R. (2009). Interval censored sampling plans for the gamma lifetime model. *European Journal of Operational Research*, **192**, 116–124.
- [11] Nigm, E.M. and Abo-Eleneen, Z.A. (2007). Estimation of the parameters of the inverse weibull distribution with progressive censoring data. *Journal of Applied Statistical Science*, **15**, 39–47.
- [12] Pérez-González, C.J. and Fernández, A.J. (2009). Accuracy of approximate progressively censored reliability sampling plans for exponential models. *Statistical Papers*, **50**(1), 161–170.
- [13] Seo, J., Jung, M. and Kim, C. (2009). Design of accelerated life test sampling plans with a nonconstant shape parameter. *European Journal of Operational Research*, **197**, 659–666.
- [14] Wilson, E.B. and Hilferty, M.M. (1931). The distribution of chi-square. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **17**, 684–688.