Aceleración de la convergencia para el problema de localización minisum con normas *lp*

Concepción Valero-Franco*, Antonio M. Rodríguez-Chía, Inmaculada Espejo Miranda

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Cádiz

*concepcion.valero@uca.es

Resumen: Este trabajo presenta un procedimiento para acelerar la convergencia del algoritmo Weiszfeld en el problema de localización minisum o problema de Weber, cuando las distancias están medidas con una norma *lp*. Para ello, se combinan los métodos de aceleración basados en la transformación del algoritmo Weiszfeld al introducir un factor de salto función de *p*, con el método de Steffesen, un esquema de aceleración genérico aplicado a los procesos iterativos para resolver ecuaciones de punto fijo. Se analiza la convergencia de la metodología propuesta y las condiciones bajo las cuales ésta garantizada. Además se realiza un análisis computacional que ilustra la eficiencia del procedimiento de resolución propuesto.

La solución del problema de Weber es usada frecuentemente como parte del proceso de resolución de problemas de localización más complejos. Estos procesos usualmente hacen uso de repetidas llamadas al algoritmo de Weiszfeld, por tanto, en los casos donde el algoritmo de Weiszfeld tiene una convergencia lenta o requiere de un número elevado de iteraciones, dichos procesos de resolución dejan de ser eficientes. De este modo, reducir el costo computacional del algoritmo de Weiszfeld se convierte en un reto interesante por la utilidad que puede tener en la mejora de otros procedimientos de resolución.

El objetivo de este capítulo es proporcionar un procedimiento convergente bajo ciertas condiciones, que nos permita acelerar la convergencia hacia la solución óptima del problema de Weber cuando las distancias son medidas con normas *lp*. Para ello se combina un método de aceleración basado en una transformación del algoritmo de Weiszfeld, consistente en incluir un factor de salto dependiente del parámetro *p* que corrija el salto, con el método de Steffensen, un sistema de aceleración aplicable a procesos iterativos definidos a través de una ecuación de punto fijo.

Cuando un proceso iterativo converge lentamente a la solución óptima de un problema, se recurre a transformaciones del mismo que permitan acelerar dicha convergencia, estas consisten en modificar la sucesión generada que converge lentamente al óptimo en otra que converge más rápidamente al mismo límite o solución. Dado que el algoritmo de Weiszfeld está definido mediante una ecuación de punto fijo, se podrían aplicar procedimientos clásicos para acelerar la resolución de este tipo de ecuaciones. (Ver Brezinski (2000), Burden et al.(1981), Drezner (1992) and Farnum (1991).

Katz (1974) y Drezner (1995) sugieren el uso del método de Steffensen para $p=2$ aplicado a cada componente en cada iteración, pero no analizan propiedades de convergencia del mismo. En esta memoria se propone una aplicación de la versión vectorial del algoritmo de Steffensen para acelerar las modificaciones del algoritmo de Weiszfeld cuando se aplican diferentes factores de salto. De este modo, este trabajo supone el primer intento de aplicar de forma vectorial la aceleración de Steffensen al algoritmo de Weiszfeld. En trabajos previos, como se ha mencionado, se aplica dicho procedimiento de aceleración a cada componente a componente de forma independiente.

Planteada nuestra propuesta de aceleración de la convergencia, gran parte del trabajo se centra en garantizar las condiciones que aseguran la convergencia de la modificación propuesta, analizando cada uno de las propiedades que debe verificar el nuevo esquema iterativo. En particular se estudian condiciones que aseguran que la función iterativa que define el algoritmo de Weiszfeld verifica que el determinante de su matriz Jacobiana en el óptimo, $G'(x^*, \lambda)$, es no nulo; así como el determinante de $I-G'(x^*, \lambda)$ tampoco es nulo. Por otro lado, también se analizan las condiciones bajo las cuales la sucesión que genera el algoritmo de Weiszfeld es uniformemente invertible y cuando la segunda derivada parcial de la función iterativa es acotada. Bajo estas condiciones y cuando la sucesión original es convergente tenemos que la aceleración de Steffensen converge también a la solución óptima. Estos son los casos en los que $\lambda < 2$ para p *en* $[1,2]$. Para los casos donde la convergencia de la modificación del algoritmo de Weiszfeld no converja o simplemente diverja, bajo las condiciones analizadas anteriormente, podemos asegurar la convergencia local de nuestro procedimiento de aceleración, en concreto, este es el caso de todos los valores de λ para $p>2$.

Una vez probados los resultados de convergencia, se proporciona un estudio computacional de la metodología propuesta para analizar la eficiencia de la misma. Se ilustra con análisis computacionales detallados tanto en el caso en el que la demanda está distribuida uniformemente en $[0,10000] \times [0,10000]$, como cuando la demanda está distribuida en clusters. La eficiencia del proceso de aceleración propuesto está testada aplicándolo a cada una de las modificaciones del algoritmo de Weiszfeld que se presentan en la literatura con salto fijo y que se recogen en el trabajo, es decir partiendo de factores de salto $\lambda=1, 1.8, 2, 2/p, 2/(p-1), 1/(p-1)$ *o* $p/(p-1)$. El estudio computacional se completa con los resultados obtenidos a través de la aceleración propuesta por Drezner (1995) y Verkhovsky y Polyakov (2003), obteniendo en la mayoría de los casos mejores resultados computacionales con el proceso acelerado propuesto en este trabajo. (Observar que no existen resultados de convergencia de la sucesión generada por estas dos propuestas de aceleración).

Referencias

M.D. Benchiboun. Linear convergence for vector sequences and some applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 55: 81-97*, 1994.

C. Brezinski. Convergence acceleration during the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 122: 1-21,* 2000.

J. Brimberg. The Fermat-Weber location problem revisited. *Mathematical Programming, 71: 71-76,* 1995.

J. Brimberg and R. Chen. A note on convergence in the single facility minisum location problem. *Computers and Mathematics with Applications, 35(9): 25-31,* 1998b.

J. Brimberg, R. Chen and D. Chen. Accelerating convergence in the Fermat-Weber location problem. *Operations Research Letters, 22: 151-157,* 1998a.

J. Brimberg and R.F. Love. A new distance function for modeling travel distances in a transportation network. *Transportation Science, 26(2): 129-137* , 1992a.

J. Brimberg and R.F. Love. Local convergence in a generalized Fermat-Weber problem. *Annals of Operations Research, 40: 33-65,* 1992b.

J. Brimberg and R.F. Love. Global convergence of a generalized iterative procedure for the minisum location problem with *lp* distances. *Operations Research, 41(6): 1153-1163,* 1993.

J. Brimberg and G.O. Wesolowsky. Minisum location with closest Euclidean distances. *Annals of Operations Research, 111: 151-165,* 2002.

L. Cánovas, R. Cañavate and A. Marín. On the convergence of the Weiszfeld algorithm. *Mathematical Programming, 93: 327-330,* 2002.

L. Cooper. An extension of the generalized Weber problem. *Journal of Regional Science, 8(2): 181-197*, 1968.

Z. Drezner. Computation of the multivariate normal integral. *ACM Transactions on Mathematical Software, 18: 470-480*, 1992a.

Z. Drezner. A note on the Weber location problem. *Annals of Operations Research, 40: 153-161*, 1992b.

Z. Drezner. A note on accelerating the Weiszfeld procedure. *Location Science, 3(4): 275-279,* 1995.

I. Espejo, A.M. Rodríguez-Chía and C. Valero. Convex ordered median problem with lp-norms. *Computers and Operations Research, 36: 2250-2262*, 2009.

J.B.G. Frenk, M.T. Melo and S. Zhang. A Weiszfeld method for a generalized lp distance minisum location model in continuous space. *Location Science, 2(2): 111-127*, 1994.

I.N. Katz. On the convergence of a numerical scheme for solving some locational equilibrium problems. *SIAM Journal of Applied Mathematics, 17(6): 1224-1231*, 1969.

I.N. Katz. Local convergence in Fermat's problem. *Mathematical Programming, 6: 89-104*, 1974.

H.W. Kuhn. A note on Fermat's problem. *Mathematical Programming, 4: 98-107*, 1973.

J.G. Morris. Convergence of the Weiszfeld algorithm for Weber problems using a generalized ``distance'' function. *Operations Research, 29(1): 37-48*, 1981.

J.G. Morris and W.A. Verdini. Minisum lp distance location problems solved via a perturbed problem and Weiszfeld´s algorithm. *Operations Research, 27: 1180-1188*, 1979.

Y. Nievergelt. Aitken's and Steffensen's accelerations in several variables. *Numerische Mathematik, 59: 295-310*, 1991.

Y. Nievergelt. The condition of Steffensen's acceleration in several variables. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 58: 291-305*, 1995.

T. Noda. The Aitken-Steffensen formula for systems of non-linear equations. *Sûgaku, 33: 369-372,* 1981.

T. Noda. The Steffensen iteration method for systems of non-linear equations. *Proceeding of the Japan Academy, Mathematical Sciences, 60: 18-21,* 1984.

T. Noda. The Aitken-Steffensen formula for systems of non-linear equations II. *Sûgaku, 38: 83-85,* 1986a.

T. Noda. The Aitken-Steffensen formula for systems of non-linear equations III. *Proceeding of the Japan Academy, Mathematical Sciences,* 62: 174-177, 1986b.

L.M. Ostresh. On the convergence of a class of iterative methods for solving the Weber location problem. *Operations Research, 26(4): 597-609*, 1978.

J. Puerto and A.M. Rodríguez-Chía. Location of a moving service facility. *Mathematical Methods of Operations Research, 49: 373-393,* 1999.

J. Puerto and A.M. Rodríguez-Chía. New models for locating a moving service facility. *Mathematical Methods of Operations Research, 63(1): 31-51,* 2006.

A.M. Rodríguez-Chía and C. Valero-Franco. On the global convergence of a generalized iterative procedure for the minisum location problem with lp distances for $p > 2$. *Mathematical Programming, to appear*, 2011.

H. Üster and R. F. Love. The convergence of the Weiszfeld algorithm. *Computers and Mathematics with Applications, 40: 443-451*, 2000.

C. Valero-Franco, A.M. Rodríguez-Chía and I. Espejo Miranda. The single facility location problem with average-distances. *TOP, 16(1): 164-194,* 2008.

B.S. Verkhovsky and Y.S. Polyakov. Feedback algorithm for the single-facility minisum problem. *Annals of the European Academy of Sciences, 127-136,* 2003.

E. Weiszfeld. Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. *Tôhoku Mathematical Journal, 43: 355-386,* 1937.

E. Weiszfeld and F. Plastria. On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum. *Annals of Operations Research, 167(1): 7-41*, 2009.