

Localización de un centro de servicios en dos regiones con normas l_1 y l_2 usando puertas de acceso (Gates).

L. Franco, F. Velasco & L. González-Abril

lfranco@us.es, velasco@us.es, luisgon@us.es

Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla

Resumen

Proponemos en este trabajo una modificación al algoritmo presentado por Brimberg (2003) para la obtención de un centro que da servicios a dos regiones separadas por una línea recta. Suponemos que las regiones tienen las normas l_1 y l_2 , respectivamente. Ilustramos el trabajo con una comparativa entre el algoritmo modificado, utilizando el concepto de Gate, y el propuesto por Brimberg.

Palabras Clave: Localización Continua, Gates, Localización simple.

1. Introducción

Consideremos el siguiente problema: sean P y Q dos puntos de \mathbb{R}^2 y una línea recta $r \equiv y = mx + y_0$, que divide al plano en dos regiones Ω_1 y Ω_2 con las normas l_1 (rectangular) y l_2 (euclídea), respectivamente. Para dos puntos cualesquiera, situados en la misma región, la distancia entre ellos viene dada por $d_1(\cdot, \cdot)$ o $d_2(\cdot, \cdot)$, distancias inducidas por las normas l_1 y l_2 , respectivamente. Si no están en el mismo semiplano, la distancia entre dos puntos $P \in \Omega_1$ y $Q \in \Omega_2$ corresponde a la longitud del camino más corto (línea geodésica) que une P y Q . Dicha distancia se denota como $d(P, Q)$ y se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$d(P, Q) = \underset{X \in r}{\text{Min}} d_1(P, X) + d_2(X, Q) \quad (1)$$

Por la convexidad estricta de la distancia euclídea este problema tiene solución única, que denotamos como $G = G(P, Q)$, se denomina puerta de acceso (Gate) y verifica:

$$d(P, Q) = d_1(P, G) + d_2(G, Q)$$

El problema (1) ha sido estudiado y resuelto explícitamente en [4] ampliando las soluciones dadas en [1] y [9]. En la sección 2 comentamos dicha solución y las consecuencias de la misma.

Consideramos ahora una situación más general que la anterior: sean P_i $_{i \in S_1}$ y Q_j $_{j \in S_2}$, puntos de Ω_1 y Ω_2 , respectivamente, donde S_1 y S_2 son dos conjuntos de índices. Estamos interesados en resolver el siguiente problema de localización simple:

$$\underset{X \in \mathbb{R}^2}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i \in S_1} w_i d(P_i, X) + \sum_{j \in S_2} w_j d(X, Q_j) \right\} \quad (2)$$

donde $w_i, w_j \in \mathbb{R}^+$, son pesos asignados a los puntos P_i y Q_j , respectivamente.

Ejemplos reales de este problema pueden verse en [1] y [7] donde hay puntos de demanda en una ciudad con calles horizontales y verticales y el resto de los puntos de demanda se encuentra fuera de la ciudad, donde es posible desplazarse en línea recta. En [2], [3] y [6] también se escogen dos regiones de Londres (la ciudad de Londres y el norte de Londres) y usando los criterios AD y SD, se obtienen l_p -normas diferentes en cada región.

Este problema fue estudiado para la normas rectangular y euclídea en [7] donde se prueba que la función objetivo no es convexa y se presenta un algoritmo heurístico denominado MWP, formulando el problema como un “mixed integer program”. También es estudiado, y resuelto con las normas anteriores en [1], para el caso particular de recta vertical $r \equiv x = \alpha$ (y por un giro para las rectas horizontales), dividiendo el problema no convexo en tres problemas convexos y eligiendo la mejor de las tres soluciones posibles. En este mismo artículo se consideran rectas oblicuas y se reformula el problema (2) como un problema de localización de múltiples instalaciones usando una adaptación del procedimiento de Weiszfeld [8].

Asimismo, en [9] se da una caracterización de los gates y se prueba que la solución del problema (2) se encuentra en la envolvente rectangular de los centros existentes. Además se realiza una comparativa entre diversos algoritmos de búsqueda: BSSS, ARS, MWP.

La mayor aportación de este trabajo consiste en una modificación del algoritmo propuesto por Brimberg en [1] que aminora los tiempos de ejecución al considerar el concepto de Gate.

Este trabajo está organizado como sigue: En la sección 2 se introduce el algoritmo MFP propuesto por Brimberg [1] además de una serie de resultados previos donde se justifica el uso del Gate y se expone un resultado obtenido en [4] con las normas l_1 y l_2 , para la obtención de los gates. La sección 3 describe el algoritmo GMFP obtenido en este trabajo. En la sección 4 se exponen los resultados computacionales entre ambos algoritmos y terminamos con las conclusiones en la sección 5.

2. Resultados previos

Brimberg [1], describe el algoritmo MFP, en el que plantea un problema Multifacility para resolver el problema (2) y que se basa en el algoritmo de Weiszfeld. El planteamiento es el siguiente:

Sean Ω_1 y Ω_2 , dos regiones de \mathbb{R}^2 separadas por una recta $r \equiv y = mx, 0 < m$.

Sean $P_i = (a_i, b_i)_{i \in S_1}$ y $Q_j = (c_j, d_j)_{j \in S_2}$, donde S_1 y S_2 son dos conjuntos de índices, puntos de demanda en Ω_1 y Ω_2 , respectivamente, tales que $P_i_{i \in S_1} \cap r = \emptyset$ y.

Supongamos que la solución del problema (2) se encuentra en Ω_2 . En este caso, el problema (2) se puede reformular de la siguiente forma:

$$\text{Min}_{X \in \mathbb{R}^2} \left\{ \sum_{i \in S_1} w_i d(P_i, X) + \sum_{j \in S_2} w_j d_2(X, Q_j) \right\} = \text{Min}_{X \in \Omega_2, Z_i \in r} \left\{ \sum_{i \in S_1} w_i d_1(P_i, Z_i) + \sum_{i \in S_1} w_i d_2(Z_i, X) + \sum_{j \in S_2} w_j d_2(X, Q_j) \right\}$$

donde $Z_i = (z_{1i}, z_{2i}) \in r$ para cada $i \in S_1$. Tenemos por tanto el problema siguiente:

$$\text{Min}_{(x,y) \in \Omega_2} \left\{ \sum_{i \in S_1} w_i |z_{1i} - a_i| + |mz_{1i} - b_i| + \sum_{i \in S_1} w_i \sqrt{(x - z_{1i})^2 + (y - mz_{1i})^2} + \sum_{j \in S_2} w_j \sqrt{(x - c_j)^2 + (y - d_j)^2} \right\}$$

Este es un problema convexo sin restricciones que se puede resolver modificando el procedimiento de Weiszfeld de localización múltiple y suavizando con una aproximación hiperbólica según Love et al. [5]. La principal modificación estriba en que tenemos dos normas en lugar de una única norma.

Según el algoritmo de Brimberg se igualan las $|S_1| + 2$ derivadas parciales a cero y

- Se eligen $|S_1| + 2$ valores iniciales arbitrarios: $x^1, y^1, z_{1i}^1, i \in S_1$ y $\varepsilon > 0$
- $$A_{1i}^k = (z_{1i}^k - a_i)^2 + \varepsilon \quad A_{2i}^k = (mz_{1i}^k - b_i)^2 + \varepsilon \quad i \in S_1$$

$$B_j^k = (x^k - c_j)^2 + \varepsilon + (y^k - d_j)^2 + \varepsilon \quad j \in S_2$$

$$C_i^k = (x^k - z_{1i}^k)^2 + \varepsilon + (y^k - mz_{1i}^k)^2 + \varepsilon \quad i \in S_1$$
- $$x^{k+1} = \frac{\left(\sum_{j \in S_2} c_j w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in S_1} z_{1i}^k w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\sum_{j \in S_2} w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in S_1} w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)} \quad y^{k+1} = \frac{\left(\sum_{j \in S_2} c_j w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + m \sum_{i \in S_1} z_{1i}^k w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\sum_{j \in S_2} w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in S_1} w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}$$
- $$z_{1i}^{k+1} = \frac{a_i A_{1i}^{k-\frac{1}{2}} + m b_i A_{2i}^{k-\frac{1}{2}} + (x^k + m y^k) C_i^{k-\frac{1}{2}}}{A_{1i}^{k-\frac{1}{2}} + m^2 A_{2i}^{k-\frac{1}{2}} + (1 + m^2) C_i^{k-\frac{1}{2}}} \quad i \in S_1$$

Análogamente si suponemos que la solución se encuentra en Ω_1 .

Justificación de los gates

Hasta alcanzar una tolerancia previamente definida, las iteraciones producen puntos Z_i^k y X^k , y evaluamos la función:

$$W^*(X^k) = \sum_{i \in S_1} w_i d_1(P_i, Z_i^k) + \sum_{i \in S_1} w_i d_2(Z_i^k, X^k) + \sum_{j \in S_2} w_j d_2(X^k, Q_j)$$

que difiere de la verdadera función a evaluar:

$$W(X^k) = \sum_{i \in S_1} w_i d_1(P_i, G_{P_i, X^k}) + \sum_{i \in S_1} w_i d_2(G_{P_i, X^k}, X^k) + \sum_{j \in S_2} w_j d_2(X^k, Q_j)$$

ya que los puntos Z_i^k , en general, no se corresponden con los gates G_{P_i, X^k} (solución del problema (1)) y, por tanto, $W^*(X^k) > W(X^k)$.

Nuestro razonamiento es el siguiente: si disponemos de una fórmula explícita para obtener los gates en cada iteración, entonces podremos acelerar la convergencia a la solución, ya que en lugar de tener un problema con $|S_1| + 2$ variables, tendremos sólo 2 variables (x, y) .

Obtención de los gates

Teorema.- Sean $P(a,b) \in \Omega_1$ y $Q(c,d) \in \Omega_2$, puntos del plano separados por la recta $r \equiv y = mx$. Entonces, el único punto $X_s(x_s, y_s) \in r$ tal que:

$$d_1(P, X_s) + d_2(X_s, Q) \leq d_1(P, X) + d_2(X, Q), \quad X \in r$$

tiene por coordenadas: (a, ma) ó $\left(\frac{b}{m}, b\right)$ ó $\left(\frac{m^*c-d}{m^*-m}, \frac{m^*c-d}{m^*-m}\right)$ con $m^* = -\frac{m}{|m|} \frac{\sqrt{|2m|} + |m|}{\sqrt{|2m|} + 1}$.

Nótese que para $m=0$ ó $m=\infty$, el gate es $(a,0)$ ó $0,b$ respectivamente (ver Franco et Al. [4]).

En lo que sigue, denotaremos al punto $X_s \in r$ como $G(P,Q)$.

Sean $P_i \in \Omega_1$ y $Q_j \in \Omega_2$, puntos pertenecientes a los semiplanos Ω_1 y Ω_2 , respectivamente, separados por la recta $y = mx$, $0 < m \leq 1$ ¹. Sea $X_s(x_s, y_s)$ el punto solución del problema:

$$\text{Min}_X \left\{ \sum_{j \in S_2} w_j d(Q_j, X) + \sum_{i \in S_1} w_i d(X, P_i) \right\}$$

Supongamos que $X_s \in \Omega_1$, es decir:

$$\text{Min}_X \left\{ \sum_{j \in S_2} w_j d(Q_j, X) + \sum_{i \in S_1} w_i d(X, P_i) \right\} = \sum_{j \in S_2} w_j d_2(Q_j, Q'_j) + \sum_{j \in S_2} w_j d_1(Q'_j, X_s) + \sum_{i \in S_1} w_i d_1(X_s, P_i)$$

donde $Q'_j = G(X_s, Q_j)$

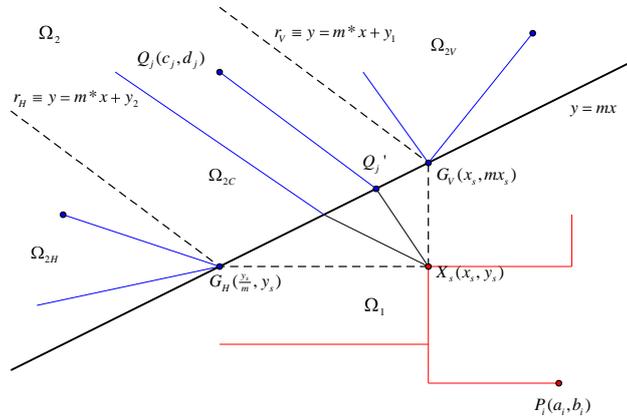


Figura1

Nótese que Ω_2 se ha dividido en tres regiones siguiendo Franco et al [4]:

- Ω_{2V} donde los Q'_j son coincidentes entre sí y con el gate $G_v = (x_s, mx_s)$, cuya ponderación es w_v , suma de las ponderaciones de los puntos de Ω_2 situados entre la recta $y = mx$ y la recta r_v (exclusive).
- Ω_{2H} donde los Q'_j son coincidentes entre sí y con el punto $G_h = (x_s/m, y_s)$, cuya ponderación es w_h , suma de las ponderaciones de los puntos de Ω_2 situados entre la recta $y = mx$ y la recta r_h (exclusive).

¹ El caso $m=0$ y $m=\infty$ se puede ver en Brimberg et al [1].

- $\Omega_{2C} = \Omega_2 \setminus (\Omega_{2V} \cup \Omega_{2H})$ donde los $Q_j = \left(\frac{m^* c_j - d_j}{m^* - m}, \frac{m m^* c_j - d_j}{m^* - m} \right)$ son los proyectados en la recta según la pendiente m^* obtenida por Brimberg et al. [1] y ampliada por Franco et al. [4] para las normas l_1 y l_q .

Supongamos ahora que $X_s \in \Omega_2$, es decir:

$$\text{Min}_X \left\{ \sum_{j \in S_2} w_j d(Q_j, X) + \sum_{i \in S_1} w_i d(X, P_i) \right\} = \sum_{j \in S_2} w_j d_2(Q_j, X_s) + \sum_{i \in S_1} w_i d_2(P_i', X_s) + \sum_{i \in S_1} w_i d_1(P_i', P_i)$$

donde $P_i' = G(X_s, P_i)$

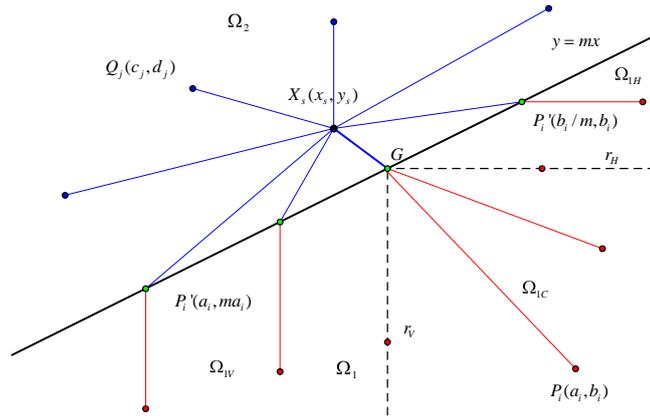


Figura 2

Nótese que Ω_1 se ha dividido en tres regiones:

- Ω_{1C} donde los P_i' son coincidentes entre sí y con el gate $G = \left(\frac{m^* x_s - y_s}{m^* - m}, \frac{m m^* x_s - y_s}{m^* - m} \right)$, cuya ponderación es w_C , suma de las ponderaciones de los puntos de Ω_1 tales que $a_i \geq \frac{m^* x_s - y_s}{m^* - m}$ y $b_i \leq \frac{m m^* x_s - y_s}{m^* - m}$.
- Ω_{1H} donde los $P_i' = (\frac{b_i}{m}, b_i)$ son la proyección horizontal sobre r de los puntos de Ω_1 tales que $b_i > \frac{m m^* x_s - y_s}{m^* - m}$.
- Ω_{1V} donde los $P_i' = (a_i, ma_i)$ son la proyección vertical en la recta de los puntos de Ω_1 tales que $a_i < \frac{m^* x_s - y_s}{m^* - m}$.

3. Algoritmo GMFP

Descripción del algoritmo

Supongamos que el óptimo se encuentra en Ω_2 . Tomamos como puntos iniciales:

$$Z_i^1 = (a_i, ma_i), \quad i \in S_1, \quad x^1 = \frac{\sum_{i \in S_1} w_i a_i + \sum_{j \in S_2} w_j c_j}{\sum_{i \in S_1} w_i + \sum_{j \in S_2} w_j}, \quad y^1 = \frac{\sum_{i \in S_1} w_i m a_i + \sum_{j \in S_2} w_j d_j}{\sum_{i \in S_1} w_i + \sum_{j \in S_2} w_j}, \quad \text{es decir,}$$

$X^1 = (x^1, y^1)$ es el centro de gravedad de los puntos de Ω_2 y de los $Z_i^1 = (a_i, ma_i)$, $i \in S_1$.

Aplicamos sucesivamente las fórmulas obtenidas en [1]:

$$\bullet \quad B_j^k = (x^k - c_j)^2 + \varepsilon + (y^k - d_j)^2 + \varepsilon, \quad C_i^k = (x^k - z_{1i}^k)^2 + \varepsilon + (y^k - m z_{2i}^k)^2 + \varepsilon$$

$$x^{k+1} = \frac{\left(\sum_{j \in S_2} c_j w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in S_1} z_{1i}^k w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\sum_{j \in S_2} w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in S_1} w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}, \quad y^{k+1} = \frac{\left(\sum_{j \in S_2} c_j w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + m \sum_{i \in S_1} z_{1i}^k w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\sum_{j \in S_2} w_j B_j^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in S_1} w_i C_i^{k-\frac{1}{2}} \right)}$$

$$\text{Hallamos } G^{k+1} = \left(\frac{m^* x^{k+1} - y^{k+1}}{m^* - m}, \frac{m m^* x^{k+1} - y^{k+1}}{m^* - m} \right) \text{ y a continuación (véase Figura 2 y fórmulas}$$

siguientes) obtenemos los puntos Z_i^{k+1} como los nuevos gates, es decir,:

$$\text{Para cada } i = 1, 2, \dots, |S_1|, \quad z_{1i}^{k+1} = \begin{cases} a_i & \text{si } a_i \leq \frac{m^* x^{k+1} - y^{k+1}}{m - m^*} \\ \frac{b_i}{m} & \text{si } b_i \geq \frac{m m^* x^{k+1} - y^{k+1}}{m - m^*} \\ \frac{m^* x^{k+1} - y^{k+1}}{m - m^*} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que el óptimo se encuentra en Ω_1 . Escogemos como puntos iniciales:

$$Z_j^1 = \left(\frac{m^* c_j - d_j}{m^* - m}, \frac{m m^* c_j - d_j}{m^* - m} \right), \quad j \in S_2, \quad x^1 = \frac{\sum_{i \in S_1} w_i a_i + \sum_{j \in S_2} w_j z_{1j}^1}{\sum_{i \in S_1} w_i + \sum_{j \in S_2} w_j}, \quad y^1 = \frac{\sum_{i \in S_1} w_i b_i + \sum_{j \in S_2} w_j z_{2j}^1}{\sum_{i \in S_1} w_i + \sum_{j \in S_2} w_j}, \quad \text{es}$$

decir, $X^1 = (x^1, y^1)$ es el centro de gravedad de los puntos de Ω_1 y de los $Z_j^1 = (z_{1j}^1, z_{2j}^1)$.

Aplicamos sucesivamente las fórmulas adaptadas al óptimo en Ω_1 :

$$\bullet \quad A_{1i}^k = (x^k - a_i)^2 + \varepsilon \quad A_{2i}^k = (y^k - b_i)^2 + \varepsilon$$

$$\bullet \quad C_{1j}^k = (x^k - z_{1j}^k)^2 + \varepsilon \quad C_{2j}^k = (y^k - m z_{1j}^k)^2 + \varepsilon$$

$$\bullet \quad x^{k+1} = \frac{\left(\sum_{i \in S_1} a_i w_i A_{1i}^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{j \in S_2} z_{1j}^k w_j C_{1j}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\sum_{i \in S_1} w_i A_{1i}^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{j \in S_2} w_j C_{1j}^{k-\frac{1}{2}} \right)}, \quad y^{k+1} = \frac{\left(\sum_{i \in S_1} b_i w_i A_{2i}^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{j \in S_2} m z_{1j}^k w_j C_{2j}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\sum_{i \in S_1} w_i A_{2i}^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{j \in S_2} w_j C_{2j}^{k-\frac{1}{2}} \right)}$$

Los puntos Z_j^{k+1} se obtienen como los nuevos gates (véase figura 1 y fórmulas siguientes), es decir, hallamos $G_V^{k+1} = (x^{k+1}, mx^{k+1})$ y $G_H^{k+1} = \left(\frac{y^{k+1}}{m}, y^{k+1} \right)$, y a continuación:

$$\text{Para cada } j=1,2,\dots,|S_2|, z_{1j}^{k+1} = \begin{cases} \frac{y^{k+1}}{m} & \text{si } d_j \leq y^{k+1} + \frac{m^* mc_j - y^{k+1}}{m} \\ x^{k+1} & \text{si } d_j \geq x^{k+1} + m^* c_j - x^{k+1} \\ \frac{m^* c_j - d_j}{m - m^*} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estas fórmulas pueden ser usadas para resolver el problema en una forma similar al procedimiento de Brimberg [1]. La siguiente sección expone resultados experimentales en el que no sólo se trata el tiempo computacional, sino también las diferencias de precisión en el valor de la función objetivo entre los dos algoritmos GMFP y MFP.

4. Resultados Computacionales

Se han elaborados sendos programas en MATLAB correspondientes a los dos algoritmos y se han ejecutado en un ordenador INTEL Core 2 Duo, CPU P8400 @2.26 GHz, 1.58 GHz, con 2.93 GB de RAM.

Para cada $n=10, 20, 40, 50, 100, 200, 500, 1000$, se han generado 10 conjuntos de n puntos aleatorios con distribución uniforme en el cuadrado $0,100 \times 0,100$ con ponderaciones unitarias ($w_i = w_j = 1$). También hemos considerado tres pendientes de la recta: $m=0.5, 1$ y 1.5

Para cada conjunto de n puntos y cada pendiente se han ejecutado ambos programas 10 veces, para una mejor evaluación del tiempo de ejecución, obteniendo en cada programa un valor único de la función objetivo y un tiempo de computación correspondiente a las 10 vueltas.

La Tabla I describe, para cada m y n , el valor medio de la función objetivo y el tiempo medio de cómputo, suponiendo que la solución está en cada una de las regiones en la que queda dividido el plano. Se ha tomado un valor de $\varepsilon = 10^{-4}$ para la aproximación hiperbólica y los programas finalizan para una tolerancia de $\tau = 10^{-6}$ o al alcanzar las 10000 iteraciones.

Además, figuran el valor óptimo medio de la función objetivo y el tiempo total medio de cómputo de cada programa. En estas dos últimas columnas hemos puesto en negrita qué algoritmo es más preciso y más rápido. Así, para las pendientes $m=0.5$ y 1 , el algoritmo GMFP domina a MFP, tanto en precisión como en tiempo de cómputo. Ahora bien, para $m=1.5$ el algoritmo MFP gana en precisión respecto al valor de la función objetivo, pero pierde en tiempo de cómputo.

Las últimas columnas corresponden a indicadores de la función objetivo y de los tiempos de cómputo. Están definidos como el cociente entre los valores proporcionados por el algoritmo GMFP y el algoritmo MFP. Para $m=1.5$, el indicador de la función objetivo tiene un valor mínimo de 1.0001 y un valor máximo de 1.0013 para 1000 puntos, con lo que no hay una gran diferencia porcentual. Sin embargo, el indicador temporal muestra diferencias apreciables entre ambos algoritmos, oscilando entre 0.5543 y 0.7831.

5. Conclusiones

Hemos presentado un algoritmo GMFP basado en el algoritmo MFP desarrollado por Brimberg [1] en el que se ha introducido en cada iteración los valores de los gates encontrados a partir del punto X^k del algoritmo MFP. Los resultados computacionales nos indican que para valores $m=0.5$ y 1, el algoritmo GMFP mejora en cuanto a precisión en la función objetivo y en tiempo de cómputo. Sin embargo para $m=1.5$, la precisión en la función objetivo es mejor en el algoritmo MFP que en el algoritmo GMFP, si bien en tiempo de cómputo el algoritmo GMFP es siempre mejor que en MFP. También hemos de indicar que para este caso el cociente entre los valores de la función objetivo para los dos algoritmos se mueve en el intervalo (1.0001, 1.0013). Las diferencias para 10, 20, 40 y 50 puntos en los valores de la función objetivo son suficientemente pequeñas. No obstante a medida que aumenta el número de puntos la diferencia entre los valores de la función objetivo son algo mayores si bien porcentualmente no son significativas.

Referencias

- [1] J. Brimberg, H. Kakhki, and G. Wesolowsky, “Location among regions with varying norms”, *Annals of Operations Researchs*, vol. 122, pp. 873–102, 2003.
- [2] J. Brimberg, J.H. Walker, and R.F. Love, “Estimation of travel distances with the weighted l_p – norm: Some empirical results”, *Journal of Transport Geography*, vol. 15, pp. 62–72, 2007.
- [3] J. Fernandez, P. Fernandez, and B. Pelegrin, “Estimating actual distances by norm functions: a comparison between the $l_{k,p,\theta}$ -norm and the $l_{b_1,b_2,\theta}$ -norm and a study about the selection of the data set”, *Computers and Operations Research*, vol. 29, pp. 609–623, 2002.
- [4] L. Franco, F. Velasco, and L. Gonzalez-Abril, “Gate Points in Continuous Location Between Regions With Different l_p -Norms,” *European Journal of Operations Research*, 10.1016/j.ejor.2011.11.047.
- [5] F.R. Love, and J.G. Morris, and G.O. Wesolowsky, *Facilities Location: Models and Methods*, Prentice Hall, 1988.
- [6] F.R. Love, and J.H. Walker, “An empirical Comparison of Block and Round Norms for Modelling Actual Distances”, *Location Science*, vol. 2, no. 1, pp. 21–43, 1994.
- [7] M. Parlar, “Single facility location problem with region-dependent distance metrics”, *International Journal of System Sciences*, vol. 25, no. 3, pp. 513–525, 1994.
- [8] Weiszfeld, E.V. “Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minisum”, *Tohoku Math. J.* 43, 335-386, 1937.
- [9] M. Zaferanieh, H. Kakhki, J. Brimberg, and G. Wesolowsky, “A BSSS algorithm for the single facility location problem in two regions with different norms”, *European Journal of Operational Research*, vol. 190, pp. 79–89, 2008.

Tabla I

m=0,5	Distancia en I-2		Tiempo en I-2		Distancia en I-1		Tiempo en I-1		Función Objetivo		Tiempo Totalx10		Índices	
	puntos	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	I(D)
10	342,71	342,71	0,022	0,159	447,68	443,65	3,698	11,595	342,71	342,71	3,720	11,755	1,0000	0,3165
20	726,13	726,13	0,025	0,144	892,47	889,76	8,933	16,394	690,96	726,13	8,958	16,538	0,9516	0,5417
40	1.522,88	1.522,89	0,030	0,127	1.827,37	1.817,37	12,091	21,209	1.522,88	1.522,89	12,120	21,336	1,0000	0,5681
50	1.948,14	1.948,15	0,027	0,216	2.273,06	2.271,85	14,030	25,178	1.948,14	1.948,15	14,056	25,394	1,0000	0,5535
100	3.947,20	3.947,23	0,030	0,423	4.538,59	4.541,76	22,123	38,163	3.947,20	3.947,23	22,153	38,586	1,0000	0,5741
200	7.915,53	7.915,60	0,053	0,500	9.096,38	9.108,26	38,297	64,459	7.915,53	7.915,60	38,350	64,959	1,0000	0,5904
500	19.826,76	19.826,92	0,117	1,734	22.745,93	22.786,34	84,211	142,266	19.826,76	19.826,92	84,328	144,000	1,0000	0,5856
1000	39.698,29	39.698,61	0,219	4,063	45.511,90	45.600,52	175,703	274,469	39.698,29	39.698,61	175,922	278,531	1,0000	0,6316

m=1	Distancia en I-2		Tiempo en I-2		Distancia en I-1		Tiempo en I-1		Función Objetivo		Tiempo Totalx10		Índices	
	puntos	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	I(D)
10	372,73	372,74	1,222	3,783	399,05	398,92	3,895	10,044	372,73	372,74	5,117	13,827	1,0000	0,3701
20	773,68	773,69	0,980	2,722	819,79	818,10	5,563	13,200	773,68	773,69	6,542	15,922	1,0000	0,4109
40	1.612,23	1.612,25	0,394	1,203	1.708,36	1.707,14	8,169	17,150	1.612,23	1.612,25	8,563	18,353	1,0000	0,4665
50	2.062,73	2.062,76	1,852	2,263	2.161,24	2.160,46	6,781	19,934	2.062,73	2.062,76	8,633	22,197	1,0000	0,3889
100	4.176,87	4.176,93	2,589	6,455	4.403,67	4.400,84	10,189	28,459	4.176,87	4.176,93	12,778	34,914	1,0000	0,3660
200	8.372,39	8.372,50	1,000	2,116	8.826,23	8.824,35	22,334	41,109	8.372,39	8.372,50	23,334	43,225	1,0000	0,5398
500	20.969,62	20.969,91	0,969	2,344	22.099,78	22.100,07	56,227	102,789	20.969,62	20.969,91	57,195	105,133	1,0000	0,5440
1000	41.977,25	41.977,83	1,547	3,672	44.240,79	44.241,71	62,141	230,578	41.977,25	41.977,83	63,688	234,250	1,0000	0,2719

m=1,5	Distancia en I-2		Tiempo en I-2		Distancia en I-1		Tiempo en I-1		Función Objetivo		Tiempo Totalx10		Índices	
	puntos	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	GMFP	MFP	I(D)
10	421,64	420,76	4,488	4,520	406,06	405,61	3,017	6,655	395,65	395,62	7,505	11,175	1,0001	0,6716
20	859,69	858,51	3,594	8,469	853,59	850,93	5,039	6,234	834,31	833,70	8,633	14,703	1,0007	0,5871
40	1.775,38	1.775,26	5,836	12,441	1.804,60	1.803,12	8,231	10,666	1.754,35	1.753,95	14,067	23,106	1,0002	0,6088
50	2.270,09	2.269,26	8,912	17,919	2.307,07	2.306,39	5,791	8,606	2.254,04	2.253,83	14,703	26,525	1,0001	0,5543
100	4.613,53	4.607,87	20,775	27,239	4.719,31	4.718,45	11,191	16,844	4.611,88	4.606,79	31,966	44,083	1,0011	0,7251
200	9.243,09	9.233,45	29,150	45,794	9.470,60	9.469,76	12,825	17,238	9.243,09	9.233,45	41,975	63,031	1,0010	0,6659
500	23.131,03	23.111,95	72,789	112,438	23.738,23	23.736,14	50,883	64,867	23.131,03	23.111,95	123,672	177,305	1,0008	0,6975
1000	46.326,74	46.268,83	201,656	215,063	47.521,94	47.522,05	57,500	115,875	46.326,74	46.268,83	259,156	330,938	1,0013	0,7831